1ère Spé **_Notre Dame de La Merci_** Mercredi 09 mars 2022

Nom : ……………………… **_Montpellier_**

Contrôle sur les applications de la dérivation

Exercice 1 : ***(2,5 points)***

Ci-contre est représentée la courbe d'une fonction g.
Indiquez ci-dessous, par lecture graphique, les valeurs suivantes :

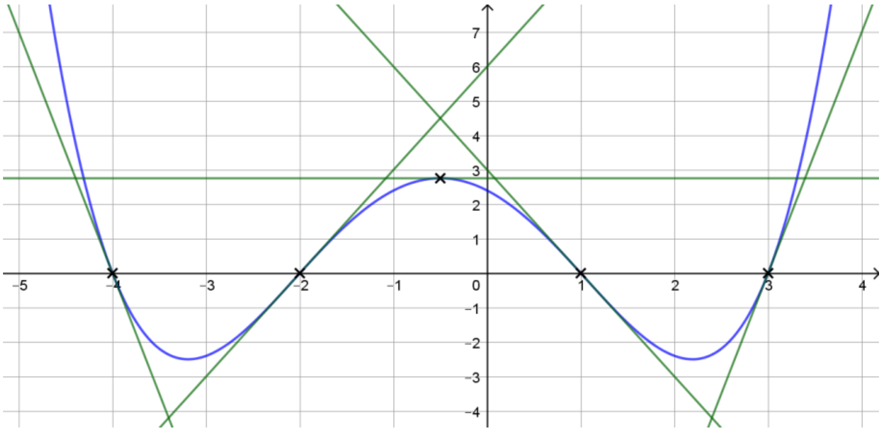
$g'(-4)=$.......

$g'(-2)=$.......

$g'(-0,5)=$.......

$g'(1)=$.......

$g'(3)=$.......



Exercice 2 : ***(4 points)***

Dériver les fonctions suivantes en indiquant les étapes intermédiaires :

$$f(x)=\left(5x+\frac{3}{x}\right)\times\sqrt{x} \qquad g(x)=\left(5x^3-4x+7-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^2$$

Exercice 3 : ***(2,5 points)***

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^2-4x$.

1) Calculer simplement $f'(x)$.
2) Déterminer les coordonnées du point où la tangente à la courbe C_f a un coefficient directeur égal à 3.

Exercice 4 : ***(5 points)***

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=2x^3+4x^2-5x+7$

1) Dériver la fonction f.
2) Etudier le signe de la dérivée f'.
3) Réaliser le tableau de variation de f.
4) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse $x=-2$.

Exercice 5 : ***(6 points)***

Soit g une fonction dérivable sur un domaine D_g non précisé, définie par : $g(x)=\dfrac{1-5x}{2+x+3x^2}$

1) Quelle est la valeur interdite ? En déduire le domaine de définition D_g de la fonction g.
2) Dériver la fonction g.
3) Etudier le signe de la dérivée g'.
4) Réaliser le tableau de variation de g.
5) Déterminer les points d'intersection de g avec les axes (Ox) et (Oy).

BONUS : Tout début de recherche sera pris en compte ***(1 point)***

Pour quelle valeur de *b*, la courbe de la fonction $f(x)=x^3+bx^2+3x$ n'admet-elle qu'une seule tangente horizontale ?

Contrôle sur les probabilités conditionnelles – CORRIGE

Exercice 1 :

Ci-contre est représentée la courbe d'une fonction g.
Indiquez ci-dessous, par lecture graphique, les valeurs suivantes :

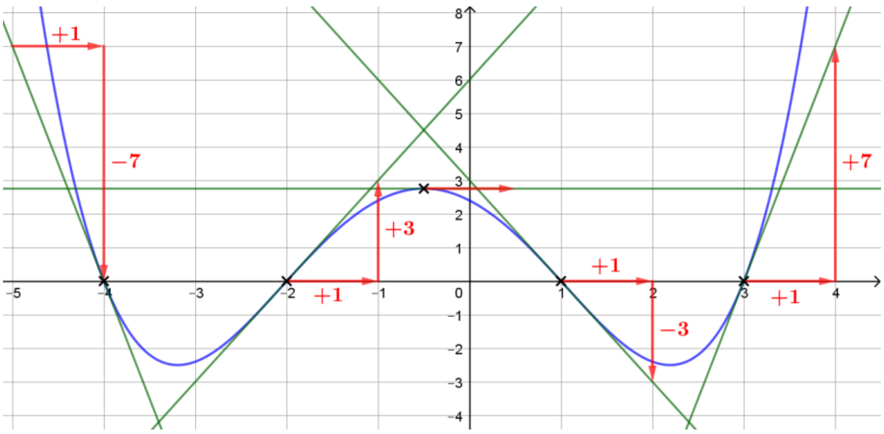
$g'(-4)=-7$

$g'(-2)=3$

$g'(-0,5)=0$

$g'(1)=-3$

$g'(3)=7$



Exercice 2 :

Dériver les fonctions suivantes en indiquant les étapes intermédiaires :

$f(x)=\left(5x+\dfrac{3}{x}\right)\times\sqrt{x}$

→on pose $u(x)=5x+\dfrac{3}{x}$ et $v(x)=\sqrt{x}$

→donc : $u'(x)=5-\dfrac{3}{x^2}$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\left(5-\frac{3}{x^2}\right)\times\sqrt{x}+\left(5x+\frac{3}{x}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\left(5-\frac{3}{x^2}\right)\times\frac{x}{\sqrt{x}}+\left(5x+\frac{3}{x}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\left(5x-\frac{3}{x}\right)\times\frac{1}{\sqrt{x}}+\left(\frac{5x}{2}+\frac{3}{2x}\right)\times\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\left(5x-\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{5x}{2}+\frac{3}{2x}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[5x-\frac{3}{x}+\frac{5x}{2}+\frac{3}{2x}\right]=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{10x}{2}-\frac{6}{2x}+\frac{5x}{2}+\frac{3}{2x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{15x}{2}-\frac{3}{2x}\right)$$

$g(x)=\left(5x^3-4x+7-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)^2$

→on pose : $u(x)=5x^3-4x+7-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ donc : $u'(x)=15x^2-4+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}$

$$g'(x)=2\left(5x^3-4x+7-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\times\left(15x^2-4+\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)$$

Exercice 3 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^2-4x$.

1) *Calculer simplement $f'(x)$.*

$f'(x)=2x-4$

2) *Déterminer les coordonnées du point où la tangente à la courbe C_f a un coefficient directeur égal à 3.*

La dérivée en tout point est égale au coefficient directeur de la courbe représentant la fonction.

$$f'(x)=3 \Leftrightarrow 2x-4=3 \Leftrightarrow 2x=3+4 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$$

Or : $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=\left(\dfrac{7}{2}\right)^2-4\times\dfrac{7}{2}=\dfrac{49}{4}-14=\dfrac{49}{4}-\dfrac{56}{4}=-\dfrac{7}{4}$

Le seul point de la courbe pour lequel le coefficient directeur de la tangente vaut 3 est $\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{7}{4}\right)$.

Exercice 4 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=2x^3+4x^2-5x+7$

1) *Dériver la fonction f.*

$$f'(x)=6x^2+8x-5$$

2) *Etudier le signe de la dérivée f'.*

$\Delta=8^2-4\times6\times(-5)=64+120=184$ d'où deux racines :

$$x_1=\frac{-8-\sqrt{184}}{2\times6}=\frac{-4-\sqrt{46}}{6} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-8+\sqrt{184}}{2\times6}=\frac{-4+\sqrt{46}}{6}$$

$a=6$ donc la parabole est « orientée vers le haut » :

$$\text{Si } x\in\left]-\infty;\frac{-4-\sqrt{46}}{6}\right[\cup\left]\frac{-4+\sqrt{46}}{6};+\infty\right[\ : \ f'(x)>0$$

$$\text{Si } x\in\left]\frac{-4-\sqrt{46}}{6};\frac{-4+\sqrt{46}}{6}\right[\ : \ f'(x)<0$$

3) *Réaliser le tableau de variation de f.*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$17{,}3$	$\searrow$	$5{,}74$	$\nearrow$	

$$f\left(\frac{-4-\sqrt{46}}{6}\right)\simeq17{,}3 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{-4+\sqrt{46}}{6}\right)\simeq5{,}74$$

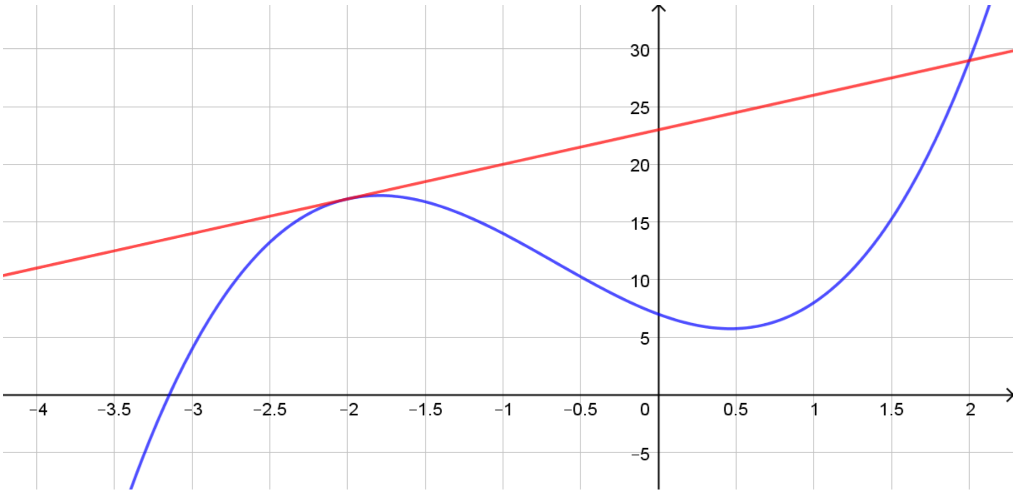
4) *Donner l'équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse* $x=-2$.

$$y=f'(-2)(x-(-2))+f(-2)$$

$$f(-2)=2\times(-2)^3+4\times(-2)^2-5\times(-2)+7=-16+16+10+7=17$$

$$f'(-2)=6\times(-2)^2+8\times(-2)-5=24-16-5=3$$

$$y=3(x+2)+17=3x+6+17=3x+23$$



Exercice 5 :

Soit g une fonction dérivable sur un domaine D_g non précisé, définie par : $g(x)=\dfrac{1-5x}{2+x+3x^2}$

1) *Quelle est la valeur interdite ? En déduire le domaine de définition D_g de la fonction g.*

$\Delta = 1^2 - 4\times 3\times 2 = 1-24 = -23 \rightarrow \Delta < 0$ donc le dénominateur ne s'annule pas.

$D_g = \mathbb{R}$.

2) *Dériver la fonction g.*

$$g'(x) = \frac{-5\times\left(2+x+3x^2\right)-(1-5x)\times(1+6x)}{\left(2+x+3x^2\right)^2} = \frac{-10-5x-15x^2-\left(1+6x-5x-30x^2\right)}{\left(2+x+3x^2\right)^2}$$

$$= \frac{-10-5x-15x^2-1-6x+5x+30x^2}{\left(2+x+3x^2\right)^2} = \frac{15x^2-6x-11}{\left(2+x+3x^2\right)^2}$$

3) *Etudier le signe de la dérivée g'.*

Pour tout réel x : $\left(2+x+3x^2\right)^2 > 0$.

Etude du numérateur :

$\Delta = (-6)^2 - 4\times 15\times(-11) = 36+660 = 696$ d'où deux racines :

$$x_1 = \frac{6-\sqrt{696}}{2\times 15} = \frac{3-\sqrt{174}}{15} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6+\sqrt{696}}{2\times 15} = \frac{3+\sqrt{174}}{15}$$

$a = 15$ donc la parabole est « orientée vers le haut » :

Si $x \in \left]-\infty;\frac{3-\sqrt{174}}{15}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{174}}{15};+\infty\right[$: $g'(x) > 0$

Si $x \in \left]\frac{3-\sqrt{174}}{15};\frac{3+\sqrt{174}}{15}\right[$: $g'(x) < 0$

4) *Réaliser le tableau de variation de g.*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	$1,63$	$\searrow$	$-0,67$	$\nearrow$	

$$g\left(\frac{3-\sqrt{174}}{15}\right) \simeq 1,63 \quad \text{et} \quad g\left(\frac{3+\sqrt{174}}{15}\right) \simeq -0,67$$

5) *Déterminer les points d'intersection de g avec les axes (Ox) et (Oy).*

Intersection avec l'axe (Ox) :

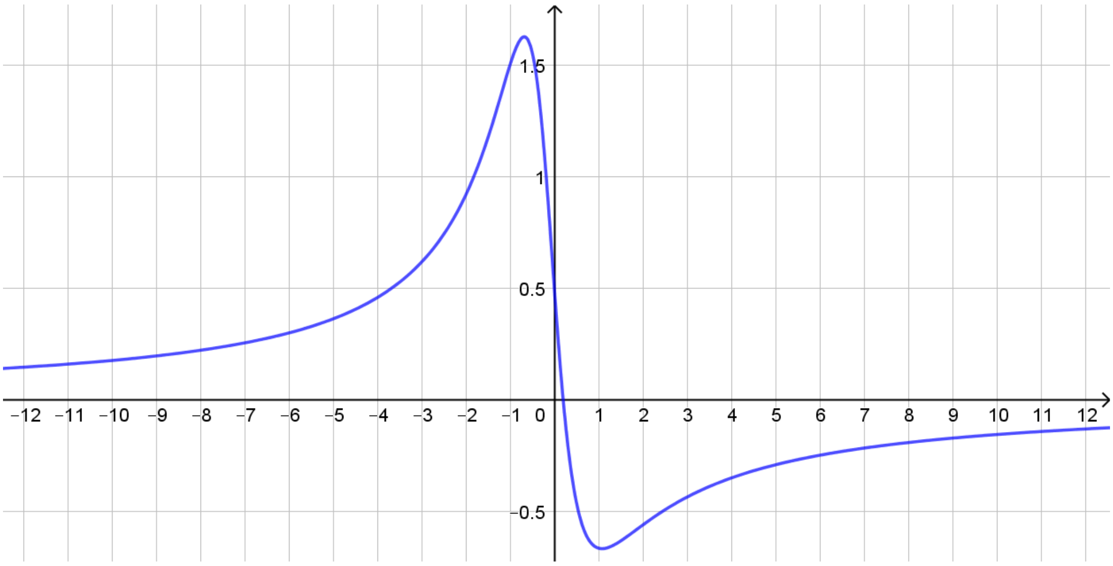
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-5x}{2+x+3x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-5x = 0 \Leftrightarrow -5x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

$\rightarrow$ soit le point $\left(\frac{1}{5};0\right)$

Intersection avec l'axe (Oy) :

$$g(0) = \frac{1-5\times 0}{2+0+3\times 0^2} = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ soit le point $\left(0;\frac{1}{2}\right)$



Bonus : **Tout début de recherche sera pris en compte** ***(1 point)***

Pour quelle valeur de b, la courbe de la fonction $f(x)=x^3+bx^2+3x$ *n'admet-elle qu'une seule tangente horizontale ?*

Une tangente horizontale est associée à une dérivée nulle.

$$f'(x)=3x^2+2bx+3.$$

On doit résoudre l'équation : $f'(x)=0$.

Ainsi : $\Delta=(2b)^2-4\times3\times3=4b^2-36$.

Or si cette courbe n'admet qu'une seule tangente horizontale, cela signifie que ce polynôme dérivé doit posséder une solution double, soit :

$$\Delta=0$$
$$\Leftrightarrow 4b^2-36=0$$
$$\Leftrightarrow 4b^2=36$$
$$\Leftrightarrow b^2=\frac{36}{4}=9$$

Soit $b=3$, soit $b=-3$.

Si $b=3$: $f'(x)=3x^2+2\times3x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$ → $f'(-1)=0$

Si $b=-3$: $f'(x)=3x^2+2\times(-3)x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$ → $f'(1)=0$