Exercice 1E.1 :

À l'aide de la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

1) Déterminer cos *x* sachant que $\sin x = \frac{2}{3}$ et $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Déterminer sin *x* sachant que $\cos x = -\frac{1}{5}$ et $x \in [-\pi ; 0]$.

Exercice 1E.2 :

Démontrer que pour tout réel *x*, on a :

a) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

b) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4\cos x \sin x$

Exercice 1E.3 :

On donne $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1) Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{5}$.

2) En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus des réels $\frac{4\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{5}$.

Exercice 1E.4 :

On donne $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

1) Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) A l'aide du cercle trigonométrique, en déduire $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Exercice 1E.1 :

À l'aide de la formule $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

1) Déterminer $\cos x$ sachant que $\sin x=\dfrac{2}{3}$ et $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \Leftrightarrow \cos^2 x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \cos^2 x+\frac{4}{9}=1 \Leftrightarrow \cos^2 x=1-\frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{5}{9}$$

Soit $\cos x=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, soit $\cos x=-\sqrt{\dfrac{5}{9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Si $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, la seule solution possible est $\cos x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

2) Déterminer $\sin x$ sachant que $\cos x=-\dfrac{1}{5}$ et $x\in[-\pi;0]$.

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^2+\sin^2 x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{25}+\sin^2 x=1 \Leftrightarrow \sin^2 x=1-\frac{1}{25} \Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{24}{25}$$

Soit $\sin x=\sqrt{\dfrac{24}{25}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, soit $\sin x=-\sqrt{\dfrac{24}{25}}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

Si $x\in[-\pi;0]$, la seule solution possible est $\sin x=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

Exercice 1E.2 :

Démontrer que pour tout réel x, on a :

a) $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$

$$\begin{aligned}(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2&=\cos^2 x+2\cos x\times\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\times\sin x+\sin^2 x\\&=\cos^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x=2\end{aligned}$$

b) $(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2=4\cos x\sin x$

$$\begin{aligned}(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2&=\cos^2 x+2\cos x\times\sin x+\sin^2 x-\left(\cos^2 x-2\cos x\times\sin x+\sin^2 x\right)\\&=\cos^2 x+2\cos x\times\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x+2\cos x\times\sin x-\sin^2 x\\&=4\cos x\times\sin x\end{aligned}$$

Exercice 1E.3 :

On donne $\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1) Calculer la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{5}$.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{1+2\sqrt{5}+5}{16}+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{6+2\sqrt{5}}{16}+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1 \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{8}{8}-\frac{3+\sqrt{5}}{8} \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

Or $\frac{\pi}{5} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\frac{\pi}{5} > 0$.

Ainsi : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2) En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus des réels $\frac{4\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{5}$.

$$\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5} \quad \text{donc} \quad \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\frac{9\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} + \frac{5\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} + \pi \quad \text{donc} \quad \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Exercice 1E.4 :

On donne $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

1) Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{2+2\sqrt{2}\times\sqrt{6}+6}{16} + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{8+2\sqrt{12}}{16} + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{8+4\sqrt{3}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{4}{4} - \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Or $\frac{\pi}{12} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\frac{\pi}{12} > 0$.

Ainsi : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

2) A l'aide du cercle trigonométrique, en déduire $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

$$\frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12} \quad \text{donc} \quad \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$