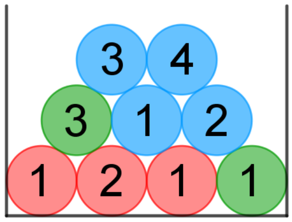
La Merci
MONTPELLIER

Exercices sur les évènements indépendants

Exercice 2A.1 :

Dans l'urne ci-contre, il y a des jetons numérotés de différentes couleurs.
On tire au hasard un jeton dans cette urne.
On considère les évènements suivants:

R : « le jeton tiré est rouge »,
B : « le jeton tiré est bleu »,
I : « le numéro du jeton tiré est impair »

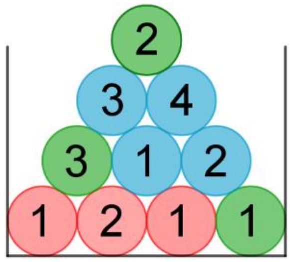


1) Les évènements R et I sont-ils indépendants ?
2) Les évènements B et I sont-ils indépendants?

Exercice 2A.2 :

Dans l'urne ci-contre, il y a des jetons numérotés de différentes couleurs.
On tire au hasard un jeton dans cette urne.
On considère les évènements suivants:

B : « le jeton tiré est bleu »,
I : « le numéro du jeton tiré est impair »



1) Les évènements B et I sont-ils indépendants?
2) Combien faut-il rajouter de jetons bleus numérotés 1 pour que les évènements B et I soient indépendants?

Exercice 2A.3 :

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie. On choisit un élève au hasard.

	Tennis	Equitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

1) Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?
2) Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

Exercice 2A.4 :

On donne la répartition des 2 000 employés d'une entreprise.

	Ouvriers	Techniciens	Ingénieurs	Total
Hommes	760	609	371	1 740
Femmes	40	91	129	260
Total	800	700	500	2 000

On interroge au hasard un employé de cette entreprise. On note :

O l'évènement : « L'employé interrogé est un ouvrier » ;
T l'évènement : « L'employé interrogé est un technicien » ;
H l'évènement : « L'employé interrogé est un homme » ;

1. Calculer la probabilité d'interroger un homme ouvrier.
2. L'employé interrogé est un technicien. Calculer la probabilité que ce soit un homme.
3. a. Les événements O et H sont-ils indépendants ?
   b. Les événements T et H sont-ils indépendants ?

Exercice 2A.5 :

Une étude réalisée sur les étudiants d'une université a permis d'établir que 70 % des étudiants possèdent un ordinateur et que, parmi ceux-ci, 40 % possèdent une automobile.
On sait aussi que 55 % des étudiants de l'université ne possèdent pas d'automobile.
On choisit au hasard un étudiant de cette université et on note O l'événement « l'étudiant possède un ordinateur » et A l'événement « l'étudiant possède une automobile ». Les événements O et A sont-ils indépendants ?

Exercice 2A.6 :

Chaque jour, Jeanne ne peut pas utiliser son portable au travail lorsque l'un des deux événements suivants se produit :

- D : « son portable est déchargé » ;
- O : « elle a oublié son portable chez elle ».

On suppose que ces deux événements sont indépendants.

Elle a observé, d'une part, que la probabilité de D est égale à 0,05 et, d'autre part, qu'elle oublie son portable chez elle un jour sur dix.

1. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité que Jeanne oublie son portable chez elle et qu'il ne soit pas déchargé ?
2. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité qu'elle ne puisse pas se servir de son portable ?
3. Au cours d'une semaine, elle travaille 5 jours. On admet que le fait qu'elle oublie son portable chez elle un jour donné est indépendant du fait qu'elle l'oublie ou non les autres jours.
   Quelle est la probabilité de l'événement A : « elle a oublié son portable chez elle au moins une fois dans la semaine » ?

Exercice 2A.7 :

On lance une pièce non truquée *n* fois de suite, *n* est un entier tel que $n \geq 2$.

a) Soit A l'événement « on obtient des résultats identiques ». Déterminer $p(\mathrm{A})$.

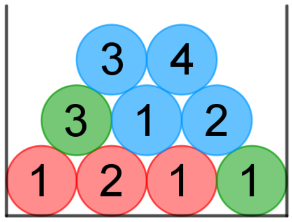
b) Soit B l'événement « on obtient Pile au plus une fois ». Déterminer $p(\mathrm{B})$.

c) Si $n=2$, les événements A et B sont-ils indépendants ? Et si $n=3$? Commenter ces résultats.

Exercice 2A.1 :

Dans l'urne ci-contre, il y a des jetons numérotés de différentes couleurs.
On tire au hasard un jeton dans cette urne.
On considère les évènements suivants:

R : « le jeton tiré est rouge »,
B : « le jeton tiré est bleu »,
I : « le numéro du jeton tiré est impair »



1) *Les évènements R et I sont-ils indépendants ?*

Le tirage a lieu au hasard donc :

$$p(\mathrm{R}) = \frac{\text{nombre de jetons rouges}}{\text{nombre de jetons}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{I}) = \frac{\text{nombre de jetons impairs}}{\text{nombre de jetons}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$p(\mathrm{R} \cap \mathrm{I}) = \frac{\text{nombre de jetons rouges et impairs}}{\text{nombre de jetons}} = \frac{2}{9}$$

On constate que $p(\mathrm{R}) \times p(\mathrm{I}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = p(\mathrm{R} \cap \mathrm{I})$ donc les évènements sont indépendants.

($p_{\mathrm{R}}(\mathrm{I}) = p(\mathrm{I})$: la proportion de jetons rouges impairs parmi les jetons rouges est la même que la proportion de jetons impairs parmi l'ensemble des jetons).

($p_{\mathrm{I}}(\mathrm{R}) = p(\mathrm{R})$: la proportion de jetons rouges impairs parmi les jetons impairs est la même que la proportion de jetons rouges parmi l'ensemble des jetons).

2) *Les évènements B et I sont-ils indépendants?*

$$p(\mathrm{B}) = \frac{\text{nombre de jetons bleus}}{\text{nombre de jetons}} = \frac{4}{9}$$

$$p(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}) = \frac{\text{nombre de jetons bleus et impairs}}{\text{nombre de jetons}} = \frac{2}{9}$$

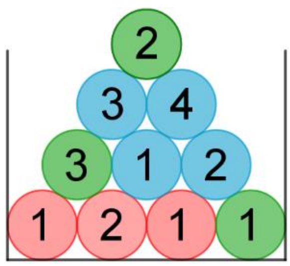
On constate que $p(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{I}) = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ donc $p(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{I}) \neq p(\mathrm{B} \cap \mathrm{I})$:

→les évènements B et I ne sont pas indépendants.

Exercice 2A.2 :

Dans l'urne ci-contre, il y a des jetons numérotés de différentes couleurs.
On tire au hasard un jeton dans cette urne.
On considère les évènements suivants:

B : « le jeton tiré est bleu »,
I : « le numéro du jeton tiré est impair »



1) *Les évènements B et I sont-ils indépendants?*

Le tirage a lieu au hasard donc :

$$p(\mathrm{B}) = \frac{\text{nombre de jetons bleus}}{\text{nombre de jetons}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

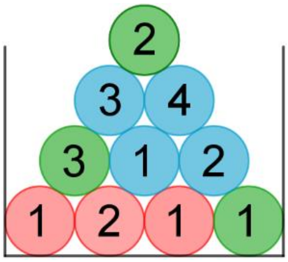
$$p(\mathrm{I}) = \frac{\text{nombre de jetons impairs}}{\text{nombre de jetons}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$p(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}) = \frac{\text{nombre de jetons bleus et impairs}}{\text{nombre de jetons}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

On constate que $p(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{I}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ donc $p(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{I}) \neq p(\mathrm{B} \cap \mathrm{I})$:

→les évènements B et I ne sont pas indépendants.

***2)** Combien faut-il rajouter de jetons bleus numérotés 1 pour que les évènements B et I soient indépendants?*



Soit x le nombre de jetons bleus et impairs à rajouter. On obtient :

$$p(\mathrm{B})=\frac{\text{nombre de jetons bleus}}{\text{nombre de jetons}}=\frac{4+x}{10+x}$$

$$p(\mathrm{I})=\frac{\text{nombre de jetons impairs}}{\text{nombre de jetons}}=\frac{6+x}{10+x}$$

$$p(\mathrm{B}\cap\mathrm{I})=\frac{\text{nombre de jetons bleus et impairs}}{\text{nombre de jetons}}=\frac{2+x}{10+x}$$

Pour que les évènements B et I soient indépendants, il faut avoir :

$$p(\mathrm{B})\times p(\mathrm{I})=p(\mathrm{B}\cap\mathrm{I})$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+x}{10+x}\times\frac{6+x}{10+x}=\frac{2+x}{10+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{24+10x+x^2}{(10+x)^2}=\frac{2+x}{10+x}\times\frac{10+x}{10+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{24+10x+x^2}{(10+x)^2}=\frac{20+12x+x^2}{(10+x)^2}$$

$$\Leftrightarrow 24+10x+x^2=20+12x+x^2$$

$$\Leftrightarrow 24+10x=20+12x$$

$$\Leftrightarrow 24-20=12x-10x$$

$$\Leftrightarrow 4=2x$$

$$\Leftrightarrow 2=x$$

Il faudrait rajouter deux jetons bleus pour que les évènements soient indépendants.

AUTRE METHODE :

Pour que les évènements B et I soient indépendants, il faut avoir : $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{I})=p(\mathrm{I})$

$$p(\mathrm{I})=\frac{\text{nombre de jetons impairs}}{\text{nombre de jetons}}=\frac{6+x}{10+x}$$

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{I})=\frac{\text{nombre de jetons bleus et impairs}}{\text{nombre de jetons bleus}}=\frac{2+x}{4+x}$$

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{I})=p(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \frac{6+x}{10+x}=\frac{2+x}{4+x} \Leftrightarrow (6+x)(4+x)=(10+x)(2+x) \Leftrightarrow 24+10x+x^2=20+12x+x^2$$

$$\Leftrightarrow 24+10x=20+12x \Leftrightarrow 24-20=12x-10x \Leftrightarrow 4=2x \Leftrightarrow 2=x$$

Exercice 2A.3 :

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie. On choisit un élève au hasard.

On doit compléter le tableau de données :

	Tennis (T)	Equitation €	Voile (V)	TOTAL
Anglais (A)	45	18	27	90
Allemand (D)	33	9	18	60
TOTAL	78	27	45	150

Chaque évènement sera caractérisé par son initiale, D pour « deutchland »

1) *Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?*

$$p(\mathrm{D})=\frac{\text{nombre de stagiaires étudiant l'allemand}}{\text{nombre de stagiaires}}=\frac{60}{150}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

$$p(\mathrm{T})=\frac{\text{nombre de stagiaires pratiquant le tennis}}{\text{nombre de stagiaires}}=\frac{78}{150}=\frac{39}{75}=\frac{13}{25}$$

$$p(\mathrm{D}\cap\mathrm{T})=\frac{\text{nombre de stagiaires pratiquant le tennis et étudiant l'allemand}}{\text{nombre de stagiaires}}=\frac{33}{150}=\frac{11}{50}$$

Ainsi $p(\mathrm{D})\times p(\mathrm{T})=\frac{2}{5}\times\frac{13}{25}=\frac{26}{125}$ donc $p(\mathrm{D})\times p(\mathrm{T})\neq p(\mathrm{D}\cap\mathrm{T})$:

→les évènements ne sont pas indépendants.

2) *Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?*

$$p(\mathrm{A})=\frac{\text{nombre de stagiaires étudiant l'anglais}}{\text{nombre de stagiaires}}=\frac{90}{150}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

$$p(\mathrm{V})=\frac{\text{nombre de stagiaires pratiquant la voile}}{\text{nombre de stagiaires}}=\frac{45}{150}=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$$

$$p(\mathrm{V}\cap\mathrm{A})=\frac{\text{nombre de stagiaires pratiquant la voile et étudiant l'anglais}}{\text{nombre de stagiaires}}=\frac{27}{150}=\frac{9}{50}$$

Ainsi $p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{V})=\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{50}=p(\mathrm{V}\cap\mathrm{A})$: les évènements sont indépendants.

Exercice 2A.4 :

On donne la répartition des 2 000 employés d'une entreprise.

	Ouvriers	*Techniciens*	*Ingénieurs*	*Total*
Hommes	*760*	*609*	*371*	*1 740*
Femmes	*40*	*91*	*129*	*260*
Total	*800*	*700*	*500*	*2 000*

On interroge au hasard un employé de cette entreprise. On note :

O l'évènement : « L'employé interrogé est un ouvrier » ;

T l'évènement : « L'employé interrogé est un technicien » ;

H l'évènement : « L'employé interrogé est un homme » ;

1. *Calculer la probabilité d'interroger un homme ouvrier.*

L'interrogation se fait au hasard donc :

$$p(\mathrm{O}\cap\mathrm{H})=\frac{\text{nombre d'hommes ouvriers}}{\text{nombre de salariés}}=\frac{760}{2000}=\frac{38}{100}=0,38$$

2. *L'employé interrogé est un technicien. Calculer la probabilité que ce soit un homme.*

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{H})=\frac{p(\mathrm{T}\cap\mathrm{H})}{p(\mathrm{T})}\quad\text{avec}\quad p(\mathrm{T}\cap\mathrm{H})=\frac{\text{nombre d'hommes techniciens}}{\text{nombre de salariés}}=\frac{609}{2000}=0,3045$$

$$\text{et}\quad p(\mathrm{T})=\frac{\text{nombre de techniciens}}{\text{nombre de salariés}}=\frac{700}{2000}=0,35$$

donc $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{H})=\frac{0,3045}{0,35}=0,87$.

On pouvait aussi écrire : $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{H})=\frac{\text{nombre d'hommes techniciens}}{\text{nombre de techniciens}}=\frac{609}{700}=0,87$

3. a. Les événements O et H sont-ils indépendants ?

$$p(\mathrm{O})=\frac{\text{nombre d'ouvriers}}{\text{nombre de salariés}}=\frac{800}{2000}=\frac{40}{100}=0,4$$

$$p_{\mathrm{H}}(\mathrm{O})=\frac{\text{nombre d'hommes ouvriers}}{\text{nombre d'hommes}}=\frac{760}{1740}\simeq 0,44$$

$p_{\mathrm{H}}(\mathrm{O})\neq p(\mathrm{O})$: les évènements O et H ne sont pas indépendants.

b. Les événements T et H sont-ils indépendants ?

Autre méthode :

$$p(\mathrm{H})=\frac{\text{nombre d'hommes}}{\text{nombre de salariés}}=\frac{1740}{2000}=0,87\ ,$$

$$p(\mathrm{T})=\frac{\text{nombre de techniciens}}{\text{nombre de salariés}}=\frac{700}{2000}=0,35$$

$$p(\mathrm{T}\cap\mathrm{H})=\frac{\text{nombre d'hommes techniciens}}{\text{nombre de salariés}}=\frac{609}{2000}=0,3045$$

Or : $p(\mathrm{H})\times p(\mathrm{T})=0,87\times 0,35=0,3045=p(\mathrm{T}\cap\mathrm{H})$

Les évènements T et H sont indépendants.

Exercice 2A.5 :

Une étude réalisée sur les étudiants d’une université a permis d’établir que 70 % des étudiants possèdent un ordinateur et que, parmi ceux-ci, 40 % possèdent une automobile.
On sait aussi que 55 % des étudiants de l’université ne possèdent pas d’automobile.
On choisit au hasard un étudiant de cette université et on note O l’événement « l’étudiant possède un ordinateur » et A l’événement « l’étudiant possède une automobile ». Les événements O et A sont-ils indépendants ?
D’après l’énoncé :

$$p(\mathrm{O})=0,7\ ,\ p_{\mathrm{O}}(\mathrm{A})=0,4\ \text{ et }\ p(\overline{\mathrm{A}})=0,55\ \text{ donc }\ p(\mathrm{A})=1-p(\overline{\mathrm{A}})=0,45.$$

Selon la loi des probabilités conditionnelles :

$$p_{\mathrm{O}}(\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{O})}{p(\mathrm{O})}\ \Leftrightarrow\ p(\mathrm{A}\cap\mathrm{O})=p_{\mathrm{O}}(\mathrm{A})\times p(\mathrm{O})=0,4\times 0,7=0,28$$

Or $\quad p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{O})=0,45\times 0,7=0,315$

Donc $\quad p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{O})\neq p_{\mathrm{O}}(\mathrm{A})$: les évènements A et O ne sont pas indépendants.

Exercice 2A.6 :

Chaque jour, Jeanne ne peut pas utiliser son portable au travail lorsque l’un des deux événements suivants se produit :

- *D : « son portable est déchargé » ;*
- *O : « elle a oublié son portable chez elle ».*

On suppose que ces deux événements sont indépendants.
Elle a observé, d’une part, que la probabilité de D est égale à 0,05 et, d’autre part, qu’elle oublie son portable chez elle un jour sur dix.

1. *Un jour de travail donné, quelle est la probabilité que Jeanne oublie son portable chez elle et qu’il ne soit pas déchargé ?*

   D’après l’énoncé : $p(\mathrm{D})=0,05$ et $p(\mathrm{O})=\frac{1}{10}=0,1.$

   Les évènements D et O sont indépendants donc les évènements $\overline{\mathrm{D}}$ et O sont eux aussi indépendants :

   $$p_{\mathrm{O}}(\overline{\mathrm{D}})=p(\overline{\mathrm{D}})=1-p(\mathrm{D})=0,95$$

   D’après la loi des probabilités conditionnelles :

   $$p_{\mathrm{O}}(\overline{\mathrm{D}})=\frac{p(\overline{\mathrm{D}}\cap\mathrm{O})}{p(\mathrm{O})}\ \Leftrightarrow\ p(\overline{\mathrm{D}}\cap\mathrm{O})=p_{\mathrm{O}}(\overline{\mathrm{D}})\times p(\mathrm{O})=p(\overline{\mathrm{D}})\times p(\mathrm{O})=0,95\times 0,1=0,095$$

2. *Un jour de travail donné, quelle est la probabilité qu’elle ne puisse pas se servir de son portable ?*

   Jeanne ne peut se servir de son téléphone s’il est déchargé ou a été oublié :

$$p(\mathrm{D}\cup\mathrm{O})=p(\mathrm{D})+p(\mathrm{O})-p(\mathrm{D}\cap\mathrm{O})$$

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p(\mathrm{D}\cap\mathrm{O})=p_{\mathrm{O}}(\mathrm{D})\times p(\mathrm{O})=p(\mathrm{D})\times p(\mathrm{O})=0{,}05\times 0{,}1=0{,}005$$

Ainsi : $p(\mathrm{D}\cup\mathrm{O})=0{,}05+0{,}1-0{,}005=0{,}145$

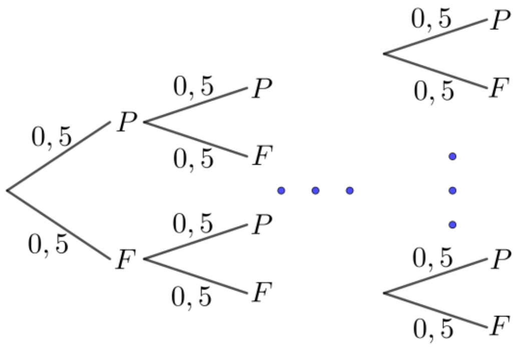
3. *Au cours d'une semaine, elle travaille 5 jours. On admet que le fait qu'elle oublie son portable chez elle un jour donné est indépendant du fait qu'elle l'oublie ou non les autres jours.*
Quelle est la probabilité de l'événement A : « elle a oublié son portable chez elle au moins une fois dans la semaine » ?
→loi binomiale puis 1 – p(aucun oubli) …

Exercice 2A.7 :

On lance une pièce non truquée n fois de suite, n est un entier tel que $n\geq 2$.

a) *Soit A l'événement « on obtient des résultats identiques ». Déterminer* $p(\mathrm{A})$.

On considère les évènements P et F : « on obtient Pile » et « on obtient Face ».



$$\mathrm{A}=\{P....P;F....F\}\text{ donc }p(\mathrm{A})=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Autre approche :

Succession de lancers identiques et indépendants menant à deux situations : Pile/Face

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de piles : X suit la loi binomiale $B\left(n;\frac{1}{2}\right)$

$$p(\mathrm{A})=p(\mathrm{X}=n)+p(\mathrm{X}=0)=\binom{n}{0}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^0+\binom{n}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

b) *Soit B l'événement « on obtient Pile au plus une fois ». Déterminer* $p(\mathrm{B})$.

$$\mathrm{B}=\{PF....F;FPF....F;FFPF....F;...;FF....FP;FF...F\}$$

Or $\quad p(FF...F)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Et $\quad p(PF....F;FPF....F;FFPF....F;...;FF....FP)=n\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc $p(\mathrm{B})=\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\times n=(1+n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) *Si* $n=2$*, les événements A et B sont-ils indépendants ? Et si* $n=3$ *? Commenter ces résultats.*

Si $n=2$: $\quad p(\mathrm{A})=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}=\frac{1}{2}$ et $p(\mathrm{B})=(1+2)\left(\frac{1}{2}\right)^2=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Or $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{FF\}$ donc $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\rightarrow p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$: $p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) \neq p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

$\rightarrow$ les événements A et B ne sont pas indépendants

Si $n = 3$: $p(\mathrm{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \frac{1}{4}$ et $p(\mathrm{B}) = (1+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

Or $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{FFF\}$ donc $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$

$\rightarrow p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$: les événements A et B sont indépendants