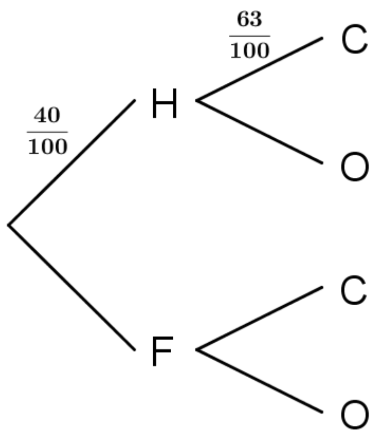
## Exercices sur les Probabilités conditionnelles

**Exercice 1D.1**

Les 1 500 employés d'une grande entreprise se divisent en deux catégories : cadres et ouvriers.
On sait que cette entreprise emploie 40 % d'hommes et 60 % de femmes.
De plus, parmi les hommes 63 % sont cadres alors que parmi les femmes 48 % sont cadres.




1) Compléter l'arbre ci-contre en indiquant dans chacun des cadres le pourcentage correspondant.
   L'arbre s'appelle alors un arbre pondéré.
2) Combien y-a-t-il de femmes dans l'entreprise ?
   Combien y-a-t-il de femmes cadres dans l'entreprise ?
3) On choisit au hasard une personne de l'entreprise.
   - Quelle est la probabilité $p(\mathrm{F})$ que la personne choisie soit une femme ?
   - Quelle est la probabilité $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{C})$ que la personne choisie soit une femme cadre ?
4) On choisit au hasard une femme de l'entreprise.
   Quelle est la probabilité que cette femme soit cadre ?
   On note cette probabilité $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})$ (probabilité que la personne choisie soit cadre sachant que c'est une femme).
   Montrer que $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}) \times p(\mathrm{F})$.
   Exprimer $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})$ en fonction de $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{C})$ et $p(\mathrm{F})$.

**Exercice 1D.2**

Un sac contient 10 jetons :
- six jetons rouges numérotés 1, 1, 1, 2, 2, 4
- quatre jetons verts numérotés 2, 2, 4, 4.

1) On tire au hasard un jeton du sac.
   a) Calculer les probabilités des événements suivants :
      R : "tirer un jeton rouge" ;
      V : "tirer un jeton vert" ;
      1 : "tirer un jeton portant le numéro 1"
   b) Calculer $p(\mathrm{R} \cap 1)$ ; $p(\mathrm{R} \cup 1)$.
2) a) On tire au hasard un jeton, et on voit qu'il est vert.
   Quelle est alors la probabilité que ce jeton porte le numéro 1 ?
   On note $p_{\mathrm{V}}(1)$ la probabilité que le jeton porte le numéro 1 sachant que ce jeton est vert.
   b) Déterminer $p_{\mathrm{R}}(1)$ ; $p_{\mathrm{R}}(2)$ ; $p_{\mathrm{R}}(4)$ ; $p_{\mathrm{V}}(2)$ ; $p_{\mathrm{V}}(4)$.
   Calculer $p_{\mathrm{R}}(1) + p_{\mathrm{R}}(2) + p_{\mathrm{R}}(4)$ et $p_{\mathrm{V}}(1) + p_{\mathrm{V}}(2) + p_{\mathrm{V}}(4)$
   c) Vérifier que $p_{\mathrm{R}}(1) = \dfrac{p(\mathrm{R} \cap 1)}{p(\mathrm{R})}$ .
3) Déterminer $p_2(\mathrm{R})$. Vérifier que $p_2(\mathrm{R}) = \dfrac{p(\mathrm{R} \cap 2)}{p(2)}$.

**Exercice 1D.3** Les élèves d'un lycée sont représentés dans le tableau ci-dessous :

| | Seconde | Première | Terminale | Total |
|---|---|---|---|---|
| Filles | 234 | 207 | 213 | 654 |
| Garçons | 203 | 185 | 192 | 580 |
| Total | 437 | 392 | 405 | 1 234 |

Pour représenter les élèves de ce lycée dans une commission départementale, on décide de choisir au hasard un élève parmi les 1 234 élèves. (Les résultats seront arrondis au millième)

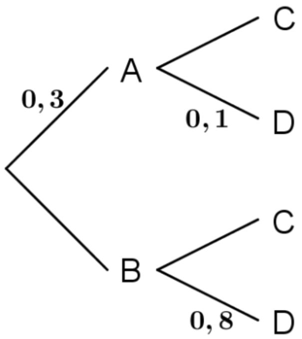
On note : G l'événement : « l'élève choisi est un garçon » ;
F l'événement : « l'élève choisi est une fille » ;
T l'événement : « l'élève choisi est en Terminale » ;
P l'événement : « l'élève choisi est en Première » ;
S l'événement : « l'élève choisi est en Seconde ».

1) Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille de Terminale ?
2) Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille ?
3) Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit un élève de Terminale ?
4) On sait que l'élève choisi est un garçon, justifier que la probabilité que ce soit un élève de Seconde est égale à 0,35.
5) On sait que l'élève choisi est une fille, quelle est la probabilité que cet élève soit en Terminale ? Relier ce résultat aux résultats des questions précédentes.
6) On sait que l'élève choisi est un élève de Terminale, quelle est la probabilité que ce soit une fille ? Relier ce résultat aux résultats des questions précédentes.
7) Illustrer cet exercice par un arbre pondéré.

**Exercice 1D.4**

Une situation de probabilités est représentée par l'arbre ci-contre.
Compléter cet arbre et donner les probabilités suivantes :

$p(\mathrm{B})$ ; $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$ ; $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})$ ; $p(\mathrm{C})$ ; $p(\mathrm{D})$ ; $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{A})$




**Exercice 1D.5**

A et C sont deux événements correspondant à une même épreuve aléatoire.

On sait que : $p(\mathrm{A})=0,6$ $p(\mathrm{C})=0,5$ $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=0,18$

Déterminer $p(\overline{\mathrm{A}})$ ; $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$ ; $p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{C}})$ ; $p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{C})$ ; $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{C})$ ; $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{C}})$ ; $p_{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{A}})$

(On pourra s'aider d'un arbre de probabilités)

**Exercice 1D.6**

On considère le jeu suivant :

On jette une première fois une pièce de monnaie :
si on obtient face, on gagne 4 euros et le jeu s'arrête ;
si on obtient pile, on gagne 1 euro et le jeu se poursuit :
on jette alors une deuxième fois la pièce :
si on obtient face on gagne 2 euros et le jeu s'arrête ;
si on obtient pile on gagne 1 euro et le jeu se poursuit :
on jette alors une troisième et dernière fois la pièce :
si on obtient face, on gagne 2 euros ;
si on obtient pile, on gagne 1 euro.

Représenter le jeu par un arbre pondéré.
En déduire la probabilité d'avoir obtenu 4 euros à la fin du jeu.

**Exercice 1D.7**

On soumet une population d'enfants à un test pour dépister la présence d'un caractère génétique A.
La probabilité qu'un enfant ayant le caractère A ait un test positif est 0,99.
La probabilité qu'un enfant n'ayant pas le caractère A ait un test négatif est 0,98.

1) On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 1 000 était porteur du caractère A.
   Représenter la situation par un arbre pondéré.
   Déterminer la probabilité qu'un enfant pris au hasard dans la population étudiée ait un test positif.
   Déterminer la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A.
   Donner une valeur approchée de ce résultat en pourcentage avec une décimale.

2) On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 100 était porteur du caractère A.
   Déterminer la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A.
   Donner une valeur approchée de ce résultat en pourcentage avec une décimale.

3) On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant avait une probabilité $p$ d'être porteur du caractère A.
   Donner, en fonction de $p$, la probabilité $V(p)$ qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A.
   $V(p)$ est appelée valeur prédictive du test.
   En utilisant une calculatrice ou un ordinateur représenter $V(p)$ en fonction de $p$ et commenter.

**Exercice 1D.8**

Une étude a porté sur les véhicules d'un parc automobile.
On a constaté que :

- lorsqu'on choisit au hasard un véhicule du parc automobile, la probabilité qu'il présente un défaut de freinage est de 0,67 ;
- lorsqu'on choisit au hasard dans ce parc un véhicule présentant un défaut de freinage, la probabilité qu'il présente aussi un défaut d'éclairage est de 0,48 ;
- lorsqu'on choisit au hasard dans ce parc un véhicule ne présentant pas de défaut de freinage, la probabilité qu'il ne présente pas non plus de défaut d'éclairage est de 0,75.

1) Représenter la situation par un arbre de probabilités.
   Déterminer la probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard présente un défaut d'éclairage.
   Traduire le résultat en terme de pourcentages.
2) Déterminer la probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard parmi les véhicules présentant un défaut d'éclairage présente aussi un défaut de freinage.
   Traduire le résultat en terme de pourcentages.

**Exercice 1D.9**

Lors d'une journée "portes ouvertes" dans un commerce, on remet à chaque visiteur un ticket numéroté qui permet de participer à une loterie. Lorsqu'un visiteur arrive, 3 cas peuvent se présenter :

- le visiteur est reconnu comme client habituel et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 0 ;
- le visiteur est reconnu comme client occasionnel et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 1 ;
- le visiteur n'est pas reconnu et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 5.

La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 0 gagne un cadeau est de 0,5 ;
La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 1 gagne un cadeau est de 0,1 ;
La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 5 gagne un cadeau est de 0,01.
Parmi les visiteurs, 15 % sont reconnus comme clients habituels et 20 % comme clients occasionnels.

1) On choisit un visiteur au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne un cadeau ?
2) Un visiteur a gagné un cadeau. Quelle est la probabilité qu'il ait été reconnu comme client habituel ?

**Exercice 1D.10**

Une pièce de monnaie n'est pas équilibrée. La probabilité d'obtenir pile est égale à 0,55.
On jette successivement deux fois cette pièce.
Traduire la situation par un arbre de probabilités.

À l'issue des deux tirages successifs quelles sont les probabilités :

- d'avoir obtenu deux fois pile ;
- d'avoir obtenu deux résultats identiques ;
- d'avoir obtenu deux résultats différents.

**Exercice 1D.11**

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
Déterminer la probabilité d'obtenir « trois fois "pile" », « trois fois "face" », « exactement deux fois "pile" », « au moins deux fois "pile" ».
Que deviennent les résultats si la pièce n'est pas équilibrée et si "pile" a une probabilité de 0,6 ?

**Exercice 1D.12**

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.
Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé (le résultat du deuxième lancer ne dépend pas du résultat du premier lancer).
À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.
On considère les événements suivants :

- E est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,
- F est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

Calculer les probabilités des événements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.

**Exercice 1D.13**

Pour recruter des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves, il y a 60 % de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates.
On rencontre au hasard un candidat qui s'était présenté.

1. Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon et qu'il soit engagé ?
2. Quelle est la probabilité que ce candidat soit une fille et qu'elle soit engagée ?
3. Calculez la probabilité que ce candidat soit engagé ?
4. Le candidat n'a pas été engagé. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

**Exercice 1D.14** (Bac 2013, première partie)

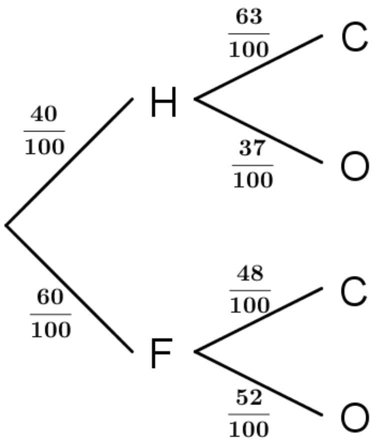
Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires. L'enquête révèle que 55% des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

- $L$: l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi;
- $C$ : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer $P(L \cap C)$ la probabilité de l'événement $L \cap C$.
3. Montrer que $P(C) = 0,5675$.
4. Calculer $P_C(L)$. En donner une valeur arrondie à $10^{-4}$.

## Exercice 1D.1

*Les 1 500 employés d'une grande entreprise se divisent en deux catégories : cadres et ouvriers.*
*On sait que cette entreprise emploie 40 % d'hommes et 60 % de femmes.*
*De plus,* ***63 % des hommes sont cadres*** *alors que parmi les femmes* ***48 % des femmes sont cadres****.*




**1)** *Compléter l'arbre ci-contre en indiquant dans chacun des cadres le pourcentage correspondant.*
L'arbre s'appelle alors un **arbre pondéré**.

**2)** *Nombre de femmes dans l'entreprise :*

$$1500\times\frac{60}{100}=900 \text{ femmes}$$

Nombre de femmes cadres dans l'entreprise :

$$900\times\frac{48}{100}=432 \text{ femmes sont cadres.}$$

**3)** *On choisit au hasard une personne de l'entreprise.*

- *Probabilité que la personne choisie soit une femme :*

$$p(\mathrm{F})=\frac{\text{nombre de femmes}}{\text{nombre de salariés}}=\frac{900}{1500}=\frac{3}{5}=0,6$$

- *Quelle est la probabilité que la personne choisie soit une femme cadre :*

$$p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})=\frac{\text{nombre de femmes cadres}}{\text{nombre de salariés}}=\frac{432}{1500}=\frac{12\times36}{12\times125}=\frac{36}{125}=0,288$$

**4)** *On choisit au hasard une femme de l'entreprise.*
*Quelle est la probabilité que cette femme soit cadre ?*

On note cette probabilité $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})$ (probabilité que la personne choisie soit cadre sachant que c'est une femme).

$$\rightarrow p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})=\frac{\text{nombre de femmes cadres}}{\text{nombre de femmes}}=\frac{432}{900}=\frac{12\times36}{25\times36}=\frac{12}{25}=0,48$$

Montrer que $p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})=p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})\times p(\mathrm{F})$.

$$\rightarrow p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})\times p(\mathrm{F})=0,48\times0,6=0,288=p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})$$

Exprimer $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})$ en fonction de $p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})$ et $p(\mathrm{F})$.

$$\rightarrow p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})=\frac{p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})}{p(\mathrm{F})}$$

## Exercice 1D.2

*Un sac contient 10 jetons :*
- *six jetons rouges numérotés 1, 1, 1, 2, 2, 4*
- *quatre jetons verts numérotés 2, 2, 4, 4.*

**1)** *On tire au hasard un jeton du sac.*

**a)** *Calculer les probabilités des événements suivants :*

R : "tirer un jeton rouge" $\rightarrow p(\mathrm{R})=\dfrac{\text{nombre de jetons rouges}}{\text{nombre de jetons}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}=0,6$

V : "tirer un jeton vert" $\rightarrow p(\mathrm{V})=1-p(\mathrm{R})=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}=0,4$

1 : "tirer un jeton portant le numéro 1" $\rightarrow p(1)=\dfrac{\text{nombre de n°1}}{\text{nombre de jetons}}=\dfrac{3}{10}=0,3$

**b)** *Calculer* $p(\mathrm{R}\cap 1)$ ; $p(\mathrm{R}\cup 1)$.

$$p(\mathrm{F})+p(\mathrm{PPF})=\frac{\text{nombre de rouges de n° 1}}{\text{nombre de jetons}}=\frac{3}{10}=0,3$$

$$p(\mathrm{R}\cup 1)=p(\mathrm{R})+p(1)-p(\mathrm{R}\cap 1)=0,6+0,3-0,3=0,6$$

**2) a)** *On tire au hasard un jeton, et on voit qu'il est vert.*
*Quelle est alors la probabilité que ce jeton porte le numéro 1 ?*

On note $p_{\mathrm{V}}(1)$ la probabilité que le jeton porte le numéro 1 sachant que ce jeton est vert.

$$p_{\mathrm{V}}(1)=\frac{\text{nombre de verts de n° 1}}{\text{nombre de jetons verts}}=\frac{0}{4}=0$$

**b)** *Déterminer* $p_{\mathrm{R}}(1)$ ; $p_{\mathrm{R}}(2)$ ; $p_{\mathrm{R}}(4)$ ; $p_{\mathrm{V}}(2)$ ; $p_{\mathrm{V}}(4)$.

$$p_{\mathrm{R}}(1)=\frac{\text{nombre de rouges de n° 1}}{\text{nombre de jetons rouges}}=\frac{3}{6}=0,5$$

$$p_{\mathrm{R}}(2)=\frac{\text{nombre de rouges de n° 2}}{\text{nombre de jetons rouges}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$p_{\mathrm{R}}(4)=\frac{\text{nombre de rouges de n° 4}}{\text{nombre de jetons rouges}}=\frac{1}{6}$$

$$p_{\mathrm{V}}(2)=\frac{\text{nombre de verts de n° 2}}{\text{nombre de jetons verts}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0,5$$

$$p_{\mathrm{V}}(4)=\frac{\text{nombre de verts de n° 4}}{\text{nombre de jetons verts}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0,5$$

$$p_{\mathrm{R}}(1)+p_{\mathrm{R}}(2)+p_{\mathrm{R}}(4)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

$$p_{\mathrm{V}}(1)+p_{\mathrm{V}}(2)+p_{\mathrm{V}}(4)=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

a) *Vérifier que* $p_{\mathrm{R}}(1)=\dfrac{p(\mathrm{R}\cap 1)}{p(\mathrm{R})}$

$$\frac{p(\mathrm{R}\cap 1)}{p(\mathrm{R})}=\frac{0,3}{0,6}=\frac{1}{2}=p_{\mathrm{R}}(1)$$

**3)** *Déterminer* $p_2(\mathrm{R})$. *Vérifier que* $p_2(\mathrm{R})=\dfrac{p(\mathrm{R}\cap 2)}{p(2)}$.

$$p_2(\mathrm{R})=\frac{\text{nombre de rouges de n° 2}}{\text{nombre de n° 2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$p(\mathrm{R}\cap 2)=\frac{\text{nombre de rouges de n° 2}}{\text{nombre de jetons}}=\frac{2}{10}=0,2$$

$$p(2)=\frac{\text{nombre de n° 2}}{\text{nombre de jetons}}=\frac{4}{10}=0,4$$

$$\frac{p(\mathrm{R}\cap 2)}{p(2)}=\frac{0,2}{0,4}=\frac{1}{2}=p_2(\mathrm{R})$$

## Exercice 1D.3

*Les élèves d'un lycée sont représentés dans le tableau ci-dessous :*

| | Seconde | Première | Terminale | Total |
|---|---|---|---|---|
| Filles | 234 | 207 | 213 | 654 |
| Garçons | 203 | 185 | 192 | 580 |
| Total | 437 | 392 | 405 | 1 234 |

*Pour représenter les élèves de ce lycée dans une commission départementale, on décide de choisir au hasard un élève parmi les 1 234 élèves. (Les résultats seront arrondis au millième)*

*On note :* *G l'événement : « l'élève choisi est un garçon » ;*
*F l'événement : « l'élève choisi est une fille » ;*
*T l'événement : « l'élève choisi est en Terminale » ;*
*P l'événement : « l'élève choisi est en Première » ;*
*S l'événement : « l'élève choisi est en Seconde ».*

**1)** *Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille de Terminale ?*

$$p(\mathrm{F}\cap\mathrm{T})=\frac{\text{nombre de filles en terminale}}{\text{nombre d'élèves}}=\frac{213}{1234}\simeq 0{,}173$$

**2)** *Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille ?*

$$p(\mathrm{F})=\frac{\text{nombre de filles}}{\text{nombre d'élèves}}=\frac{654}{1234}\simeq 0{,}530$$

**3)** *Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit un élève de Terminale ?*

$$p(\mathrm{T})=\frac{\text{nombre de terminales}}{\text{nombre d'élèves}}=\frac{405}{1234}\simeq 0{,}328$$

**4)** *On sait que l'élève choisi est un garçon, justifier que la probabilité que ce soit un élève de Seconde est égale à 0,35.*

$$p_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})=\frac{\text{nombre de garçons en seconde}}{\text{nombre de garçons}}=\frac{203}{580}=0{,}35$$

**5)** *On sait que l'élève choisi est une fille, quelle est la probabilité que cet élève soit en Terminale ? Relier ce résultat aux résultats des questions précédentes.*

$$p_{\mathrm{F}}(\mathrm{T})=\frac{\text{nombre de filles en terminale}}{\text{nombre de filles}}=\frac{213}{654}\simeq 0{,}326$$

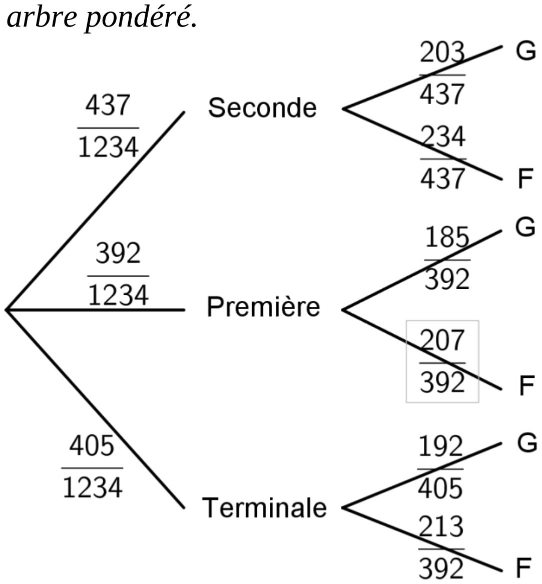
$$\frac{p(\mathrm{F}\cap\mathrm{T})}{p(\mathrm{F})}=\frac{0{,}173}{0{,}530}\simeq 0{,}326=p_{\mathrm{F}}(\mathrm{T})$$

**6)** *On sait que l'élève choisi est un élève de Terminale, quelle est la probabilité que ce soit une fille ? Relier ce résultat aux résultats des questions précédentes.*

$$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{F})=\frac{\text{nombre de filles en terminale}}{\text{nombre de terminales}}=\frac{213}{405}\simeq 0{,}526$$

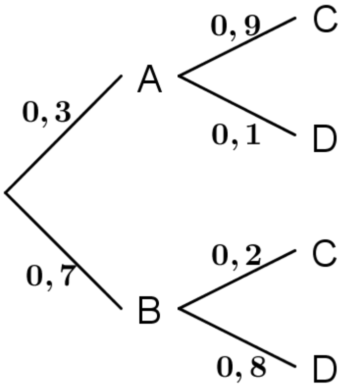
$$\frac{p(\mathrm{F}\cap\mathrm{T})}{p(\mathrm{T})}=\frac{0{,}173}{0{,}328}\simeq 0{,}527\simeq p_{\mathrm{T}}(\mathrm{F})$$

**7)** *Illustrer cet exercice par un arbre pondéré.*



## Exercice 1D.4

*Une situation de probabilités est représentée par l'arbre ci-contre.*
*Compléter cet arbre et donner les probabilités suivantes :*




$p(\mathrm{B})=1-p(\mathrm{A})=0{,}7$ $\qquad$ $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})=1-p_{\mathrm{A}}(\mathrm{D})=0{,}9$

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})=0{,}9\times0{,}3=0{,}27$$

A et B forment une partition de l'univers :
Formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}p(\mathrm{C})&=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})+p(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\\&=p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})+p(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})\\&=0{,}3\times0{,}9+0{,}7\times0{,}2=0{,}27+0{,}14=0{,}41\end{aligned}$$

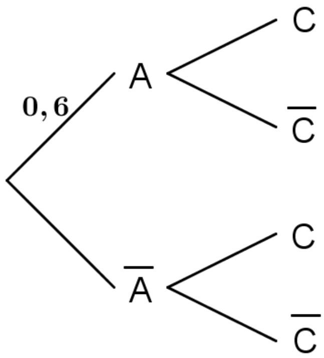
$$\begin{aligned}p(\mathrm{D})&=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})+p(\mathrm{B}\cap\mathrm{D})\\&=p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{D})+p(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{D})\\&=0{,}3\times0{,}1+0{,}7\times0{,}8=0{,}03+0{,}56=0{,}59\end{aligned}$$

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p_{\mathrm{C}}(\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})}{p(\mathrm{C})}=\frac{0{,}27}{0{,}41}=\frac{27}{41}\simeq0{,}659$$

## Exercice 1D.5

*A et C sont deux événements correspondant à une même épreuve aléatoire.*




On sait que : $\quad p(\mathrm{A})=0{,}6 \qquad p(\mathrm{C})=0{,}5 \qquad p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=0{,}18$

$\overline{\mathrm{A}}$ est l'évènement contraire de A donc :

$$p(\overline{\mathrm{A}})=1-p(\mathrm{A})=1-0{,}6=0{,}4$$

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})}{p(\mathrm{A})}=\frac{0{,}18}{0{,}6}=0{,}3$$

Loi des nœuds :

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})+p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{C}})=1 \text{ donc } p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{C}})=1-p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})=1-0{,}3=0{,}7$$

A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})+p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{C})=p(\mathrm{C}) \text{ donc } p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{C})=p(\mathrm{C})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=0{,}5-0{,}18=0{,}32$$

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{C})=\frac{p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{C})}{p(\overline{\mathrm{A}})}=\frac{0{,}32}{0{,}4}=0{,}8$$

Loi des nœuds :

$$p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{C})+p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{C}})=1 \text{ donc } p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{C}})=1-p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{C})=1-0{,}8=0{,}2$$

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p_{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{A}})=\frac{p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{C})}{p(\mathrm{C})}=\frac{0{,}32}{0{,}5}=0{,}64$$

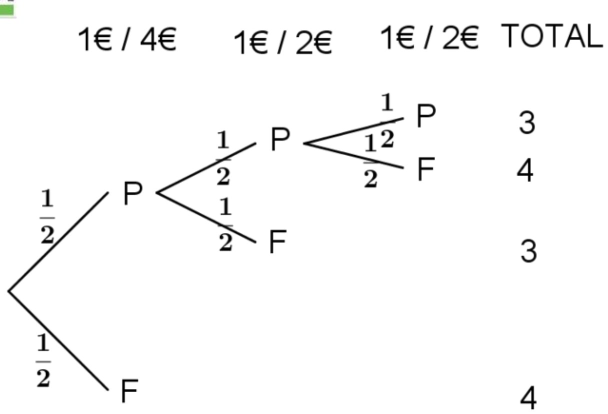
## Exercice 1D.6

*On considère le jeu suivant :*
*On jette une première fois une pièce de monnaie :*

*si on obtient face, on gagne 4 € et le jeu s'arrête ;*
*si on obtient pile, on gagne 1 € et le jeu se poursuit :*

*On jette alors une deuxième fois la pièce :*

*si on obtient face on gagne 2 € et le jeu s'arrête ;*
*si on obtient pile on gagne 1 € et le jeu se poursuit :*
*On jette alors une troisième et dernière fois la pièce :*
*si on obtient face, on gagne 2 € ;*
*si on obtient pile, on gagne 1 €.*
*Représenter le jeu par un arbre pondéré.*



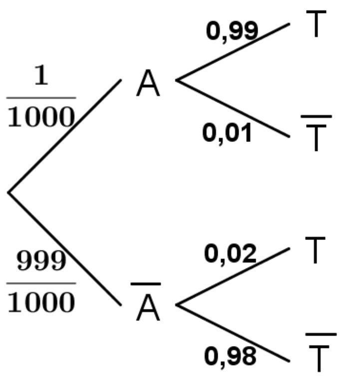

*Probabilité d'avoir obtenu 4 euros à la fin du jeu :*

$$p(\mathrm{F})+p(\mathrm{PPF})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}=0,625$$

## Exercice 1D.7

*On soumet une population d'enfants à un test pour dépister la présence d'un caractère génétique A.*
*La probabilité qu'un enfant ayant le caractère A ait un test positif est 0,99.*
*La probabilité qu'un enfant n'ayant pas le caractère A ait un test négatif est 0,98.*

**1)** *On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 1 000 était porteur du caractère A.*
*Représenter la situation par un arbre pondéré.*
*Déterminer la probabilité qu'un enfant pris au hasard dans la population étudiée ait un test positif.*




→Formule des **probabilités totales** : $p(\mathrm{T})=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{T})+p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{T})$

$$p(\mathrm{T})=p_{\mathrm{A}}(\mathrm{T})\times p(\mathrm{A})+p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{T})\times p(\overline{\mathrm{A}})$$

$$p(\mathrm{T})=0,99\times0,001+0,02\times0,999$$

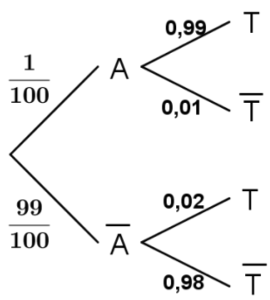
$$=0,00099+0,01998\simeq0,021$$

*Déterminer la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A.*

→Formule des **probabilités conditionnelles** : $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{A})=\dfrac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{T})}{p(\mathrm{T})}=\dfrac{0,99\times0,001}{0,021}\simeq0,047$

*Donner une valeur approchée de ce résultat en pourcentage avec une décimale.*
→seulement 4,7% des enfants ayant un test positif sont réellement porteurs du caractère A.

**2)** *On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 100 était porteur du caractère A.*
*Déterminer la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A.*

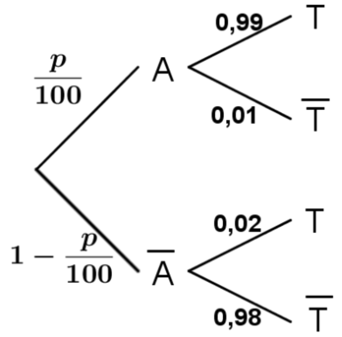



$$p(\mathrm{T})=0,99\times0,01+0,02\times0,99=0,0297$$

$$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{T})}{p(\mathrm{T})}=\frac{0,99\times0,01}{0,0297}\simeq0,333$$

→33,3% des enfants ayant un test positif sont porteurs du caractère A

**3)** *On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant avait une probabilité p d'être porteur du caractère A.*
*Donner, en fonction de p, la probabilité $V(p)$ qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A.*
*$V(p)$ est appelée valeur prédictive du test.*



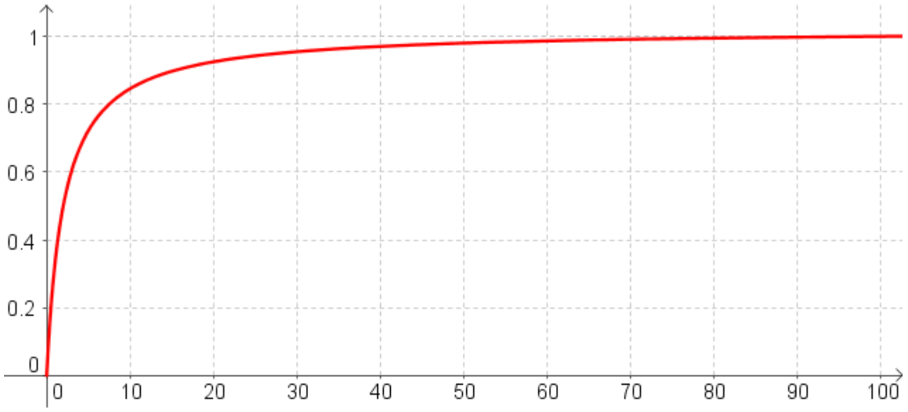

$$p(T) = 0{,}99 \times \frac{p}{100} + 0{,}02 \times \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

$$p(T) = \frac{0{,}99p}{100} + 0{,}02 - \frac{0{,}02p}{100} = \frac{0{,}97p}{100} + 0{,}02$$

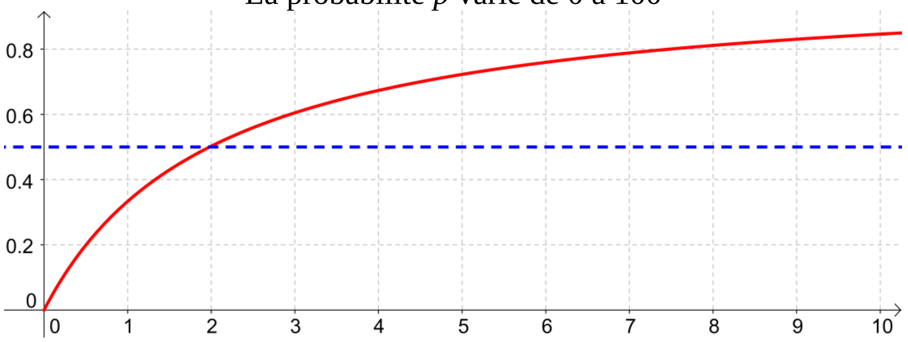
$$p_T(A) = \frac{p(A \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}99 \times \frac{p}{100}}{\frac{0{,}97p}{100} + 0{,}02} = \frac{\frac{0{,}99p}{100}}{\frac{0{,}97p}{100} + \frac{2}{100}} = \frac{\frac{0{,}99p}{100}}{\frac{0{,}97p+2}{100}} = \frac{0{,}99p}{100} \times \frac{100}{0{,}97p+2}$$

$$p_T(A) = \frac{0{,}99p}{0{,}97p+2}$$

En utilisant une calculatrice ou un ordinateur représenter $V(p)$ en fonction de $p$ et commenter.



La probabilité $p$ varie de 0 à 100



Zoom sur l'intervalle $[0;10]$

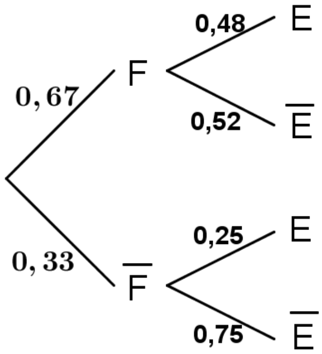
Le test ne devient fiable à plus de 50% qu'à partir d'un taux de contamination de 2% de la population.
→en dessous de ce seuil, le test ne peut être considéré comme fiable.
Le test n'est fiable à plus de 90% qu'à partir d'un taux de contamination de 20% de la population.
→le test n'est fiable que tardivement, lorsqu'une part de la population est contaminée.

**Exercice 1D.8** *Une étude a porté sur les véhicules d'un parc automobile.*
*On a constaté que :*

- *lorsqu'on choisit au hasard un véhicule du parc automobile, la probabilité qu'il présente un défaut de freinage est de 0,67 ;*
- *lorsqu'on choisit au hasard dans ce parc un véhicule présentant un défaut de freinage, la probabilité qu'il présente aussi un défaut d'éclairage est de 0,48 ;*

- *lorsqu'on choisit au hasard dans ce parc un véhicule ne présentant pas de défaut de freinage, la probabilité qu'il ne présente pas non plus de défaut d'éclairage est de 0,75.*

**1)** *Représenter la situation par un arbre de probabilités.*
*Déterminer la probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard présente un défaut d'éclairage.*
*Traduire le résultat en terme de pourcentages.*




→On note :

F l'événement : « le véhicule présente un défaut de freinage » ;
E l'événement : «le véhicule présente un défaut d'éclairage».

F et $\overline{\text{F}}$ forment une partition :

Formule des **probabilités totales** : $p(\text{E}) = p(\text{F} \cap \text{E}) + p(\overline{\text{F}} \cap \text{E})$

$$p(\text{E}) = p_{\text{F}}(\text{E}) \times p(\text{F}) + p_{\overline{\text{F}}}(\text{E}) \times p(\overline{\text{F}})$$

$$p(\text{E}) = 0,48 \times 0,67 + 0,25 \times 0,33 = 0,4041$$

Environ 40% des véhicules présentent un défaut d'éclairage.

**2)** *Déterminer la probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard parmi les véhicules présentant un défaut d'éclairage présente aussi un défaut de freinage. Traduire le résultat en terme de pourcentages.*

→Formule des **probabilités conditionnelles** : $p_{\text{E}}(\text{F}) = \dfrac{p(\text{F} \cap \text{E})}{p(\text{E})} = \dfrac{0,48 \times 0,67}{0,4041} \simeq 0,796$

Environ 80% des véhicules présentant un défaut d'éclairage ont également un défaut de freinage.

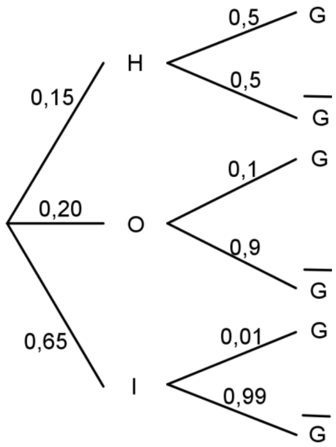
## Exercice 1D.9

*Lors d'une journée "portes ouvertes" dans un commerce, on remet à chaque visiteur un ticket numéroté qui permet de participer à une loterie. Lorsqu'un visiteur arrive, 3 cas peuvent se présenter :*

- *le visiteur est reconnu comme client habituel et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 0 ;*
- *le visiteur est reconnu comme client occasionnel et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 1 ;*
- *le visiteur n'est pas reconnu et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 5.*

*La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 0 gagne un cadeau est de 0,5 ;*
*La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 1 gagne un cadeau est de 0,1 ;*
*La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 5 gagne un cadeau est de 0,01.*
*Parmi les visiteurs, 15 % sont reconnus comme clients habituels et 20 % comme clients occasionnels.*

**1)** On choisit un visiteur au hasard.




→On note :

H l'événement : «le visiteur est reconnu comme client habituel» ;
E l'événement : «le visiteur est reconnu comme client occasionnel»,
I l'événement : «le visiteur est non reconnu».

La probabilité pour qu'il gagne un cadeau est :
H, O et I forment une partition de l'univers donc
d'après la formule des **probabilités totales** :

$$p = p(\text{H} \cap \text{G}) + p(\text{O} \cap \text{G}) + p(\text{I} \cap \text{G})$$

$$p = p_{\text{H}}(\text{G}) \times p(\text{H}) + p_{\text{O}}(\text{G}) \times p(\text{O}) + p_{\text{I}}(\text{G}) \times p(\text{I})$$

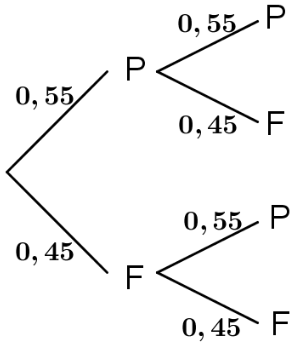
$$p = 0,5 \times 0,15 + 0,1 \times 0,20 + 0,01 \times 0,65 = 0,1015$$

**2)** *Un visiteur a gagné un cadeau. Quelle est la probabilité qu'il ait été reconnu comme client habituel ?*

Formule des **probabilités conditionnelles** : $p_{\text{G}}(\text{H}) = \dfrac{p(\text{G} \cap \text{H})}{p(\text{G})} = \dfrac{0,5 \times 0,15}{0,1015} \simeq 0,739$

→Près de 74% des gagnants sont des clients habituels.

## Exercice 1D.10




*Une pièce de monnaie n'est pas équilibrée.*
*La probabilité d'obtenir pile est égale à 0,55.*
*On jette successivement deux fois cette pièce.*
*Traduire la situation par un arbre de probabilités.*
*À l'issue des deux tirages successifs quelles sont les probabilités :*

- *d'avoir obtenu deux fois pile ;*
- *d'avoir obtenu deux résultats identiques ;*
- *d'avoir obtenu deux résultats différents.*

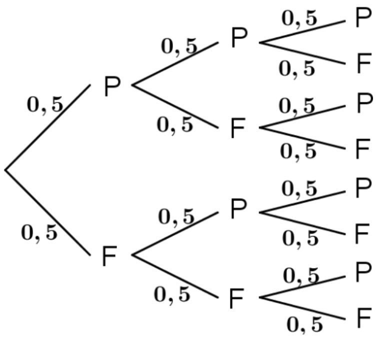
Probabilité d'obtenir deux fois pile : $p(\mathrm{PP})=0,55\times 0,55=0,3025$

Probabilité d'obtenir deux résultats identiques : $p(\mathrm{PP})+p(\mathrm{FF})=0,55\times 0,55+0,45\times 0,45=0,505$

Probabilité d'obtenir deux résultats différents:

$$p(\mathrm{PF})+p(\mathrm{FP})=1-\left[p(\mathrm{PP})+p(\mathrm{FF})\right]=1-0,505=0,495$$

## Exercice 1D.11




*On jette trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.*
*Probabilité d'obtenir « trois fois "pile" » :*

$$p(\mathrm{PPP})=0,5\times 0,5\times 0,5=0,125$$

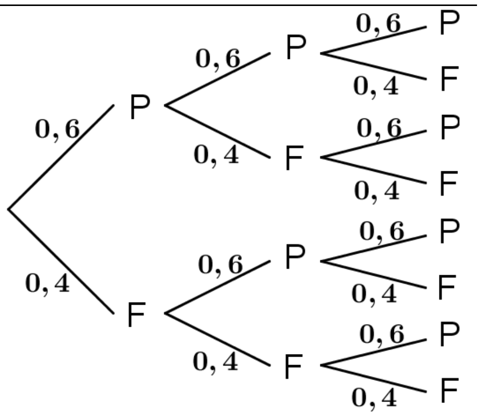
*Probabilité d'obtenir « trois fois " face " » :*

$$p(\mathrm{FFF})=0,5\times 0,5\times 0,5=0,125$$

*Probabilité d'obtenir « exactement deux fois "pile" » :*

$$p(\mathrm{PPF})+p(\mathrm{PFP})+p(\mathrm{FPP})=(0,5\times 0,5\times 0,5)\times 3=0,375$$

---




*Si la pièce n'est pas équilibrée et si "pile" a une probabilité de 0,6*
*Probabilité d'obtenir « trois fois "pile" » :*

$$p(\mathrm{PPP})=0,6\times 0,6\times 0,6=0,216$$

*Probabilité d'obtenir « trois fois " face " » :*

$$p(\mathrm{FFF})=0,4\times 0,4\times 0,4=0,064$$

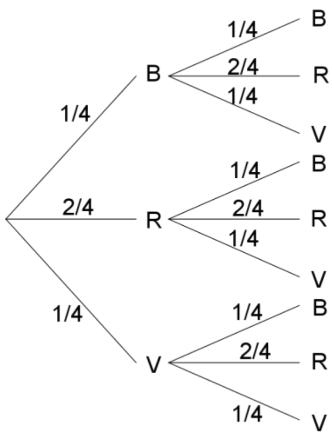
*Probabilité d'obtenir « exactement deux fois "pile" » :*

$$p(\mathrm{PPF})+p(\mathrm{PFP})+p(\mathrm{FPP})=(0,6\times 0,6\times 0,4)\times 3=0,432$$

*Probabilité d'obtenir « au moins deux fois "pile" » :*

Probabilité d'obtenir « trois fois "pile" » + Probabilité d'obtenir « deux fois "pile" » $=0,216+0,432=0,648$

## Exercice 1D.12




*On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant :*

- *une face bleue,*
- *deux faces rouges,*
- *une face verte*

*On suppose le dé parfaitement équilibré.*
*Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé (le résultat du deuxième lancer ne dépend pas du résultat du premier lancer).*
*À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.*
*On considère les événements suivants :*

- *E est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,*
- *F est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».*

*Calculer les probabilités des événements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.*

$$p(\mathrm{E}) = p_{\mathrm{V}}(\mathrm{V}) \times p(\mathrm{V}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$p(\mathrm{F}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{B}) + p_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}) \times p(\mathrm{R}) + p_{\mathrm{V}}(\mathrm{V}) \times p(\mathrm{V})$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Probabilités conditionnelles :

$$p_{\mathrm{F}}(\mathrm{E}) = \frac{p(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})}{p(\mathrm{F})}$$

Or E est inclus dans F donc $(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) = \mathrm{E}$. Ainsi :

$$p_{\mathrm{F}}(\mathrm{E}) = \frac{p(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})}{p(\mathrm{F})} = \frac{p(\mathrm{E})}{p(\mathrm{F})} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{16} \times \frac{8}{3} = \frac{8}{2 \times 8 \times 3} = \frac{1}{6}$$

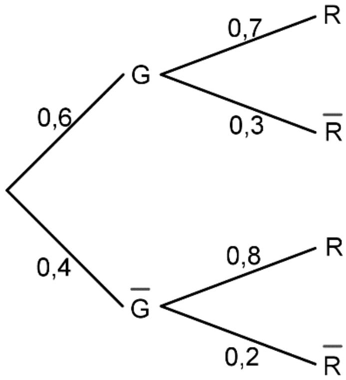
## Exercice 1D.13 :

*Pour recruter des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves, il y a 60 % de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates.*

*On rencontre au hasard un candidat qui s'était présenté.*

1. *Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon et qu'il soit engagé ?*
2. *Quelle est la probabilité que ce candidat soit une fille et qu'elle soit engagée ?*
3. *Calculez la probabilité que ce candidat soit engagé ?*
4. *Le candidat n'a pas été engagé. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?*

Soit G l'évènement « le candidat est un garçon » et R l'évènement « le candidat est reçu ». On obtient :




1. **Formule des probabilités conditionnelles** :
   $p(G \cap R) = p(G) \times p_G(R) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$
   → 42 % des garçons sont engagés.
2. $p(F \cap R) = p(F) \times p_F(R) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$
   → 32 % des filles sont engagées.
3. Garçons et filles forment une partition de l'ensemble des candidats.
   D'après la **loi des probabilités totales** :
   $p(R) = p(G \cap R) + p(F \cap R) = 0,42 + 0,32 = 0,74$
   → 74 % des candidats ont été reçus.
4. **Formule des probabilités conditionnelles** :

$$p_{\overline{R}}(\overline{G}) = \frac{p(\overline{G} \cap \overline{R})}{p(\overline{R})} = \frac{p(\overline{G}) \times p_{\overline{G}}(\overline{R})}{1 - p(R)} = \frac{0,4 \times 0,2}{1 - 0,74} \simeq 0,3077$$

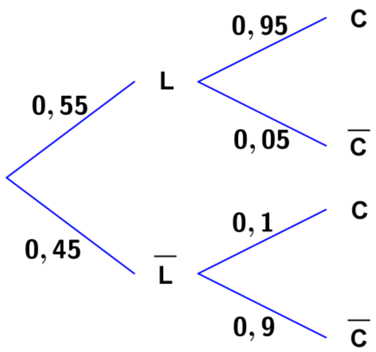
Environ 30,77 % des candidats non retenus sont des filles.

## Exercice 1D.14 :

*Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires. L'enquête révèle que 55% des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.*

*On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :*

- *L: l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi;*
- *C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.*




1. *Construire un arbre pondéré décrivant la situation.*
2. *Calculer* $p(L \cap C)$ *la probabilité de l'événement* $L \cap C$.

   **Formule des probabilités conditionnelles** : $p_L(C) = \dfrac{p(L \cap C)}{p(L)}$

   donc $p(L \cap C) = p_L(C) \times p(L) = 0{,}95 \times 0{,}55 = 0{,}5225$
3. *Montrer que p(C) = 0,5675.*

   **Loi des probabilités totales :**

   $$p(C) = p(C \cap L) + p(C \cap \overline{L}) = 0{,}5225 + p_{\overline{L}}(C) \times p(\overline{L})$$
   $$= 0{,}5225 + 0{,}45 \times 0{,}1 = 0{,}5225 + 0{,}045 = 0{,}5675$$
4. *Calculer* $p_C(L)$, *la probabilité de l'évènement L sachant l'évènement C réalisé. En donner une valeur arrondie à* $10^{-4}$.

   **Formule des probabilités conditionnelles** : $p_C(L) = \dfrac{p(L \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0{,}5225}{0{,}5675} \simeq 0{,}9207$