**Contrôle de Mathématiques**

*Je sais bien que le plus petit élan d'amour vrai nous rapproche beaucoup plus de Dieu*
*que toute la science que nous pouvons avoir de la création et de ses degrés.*
*Antonin Artaud*

**Exercice 1 :** ***(6 pts)***

Donner les racines, la forme factorisée, le tableau de signes puis le tableau de variations des polynômes suivants :

$P(x)=x^2+5x-36$ $\qquad\qquad$ $Q(x)=-3x^2-6x+24$

**Exercice 2 :** ***(4 pts)***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\dfrac{-3x^2+5x+8}{6-2x}\geq 0$.

**Exercice 3 :** ***(3 pts)***

Trouver deux entiers consécutifs (qui se suivent) dont le produit est égal à 4 970.

**Exercice 4 :** **Optimisation de bénéfice** ***(10 pts)***

Une entreprise fabrique un produit « Champion ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.
Le **coût total**, exprimé en **milliers** d'euros, de fabrication de $x$ **milliers** d'articles est modélisé par la fonction $C$ définie sur $]0;15]$ par :

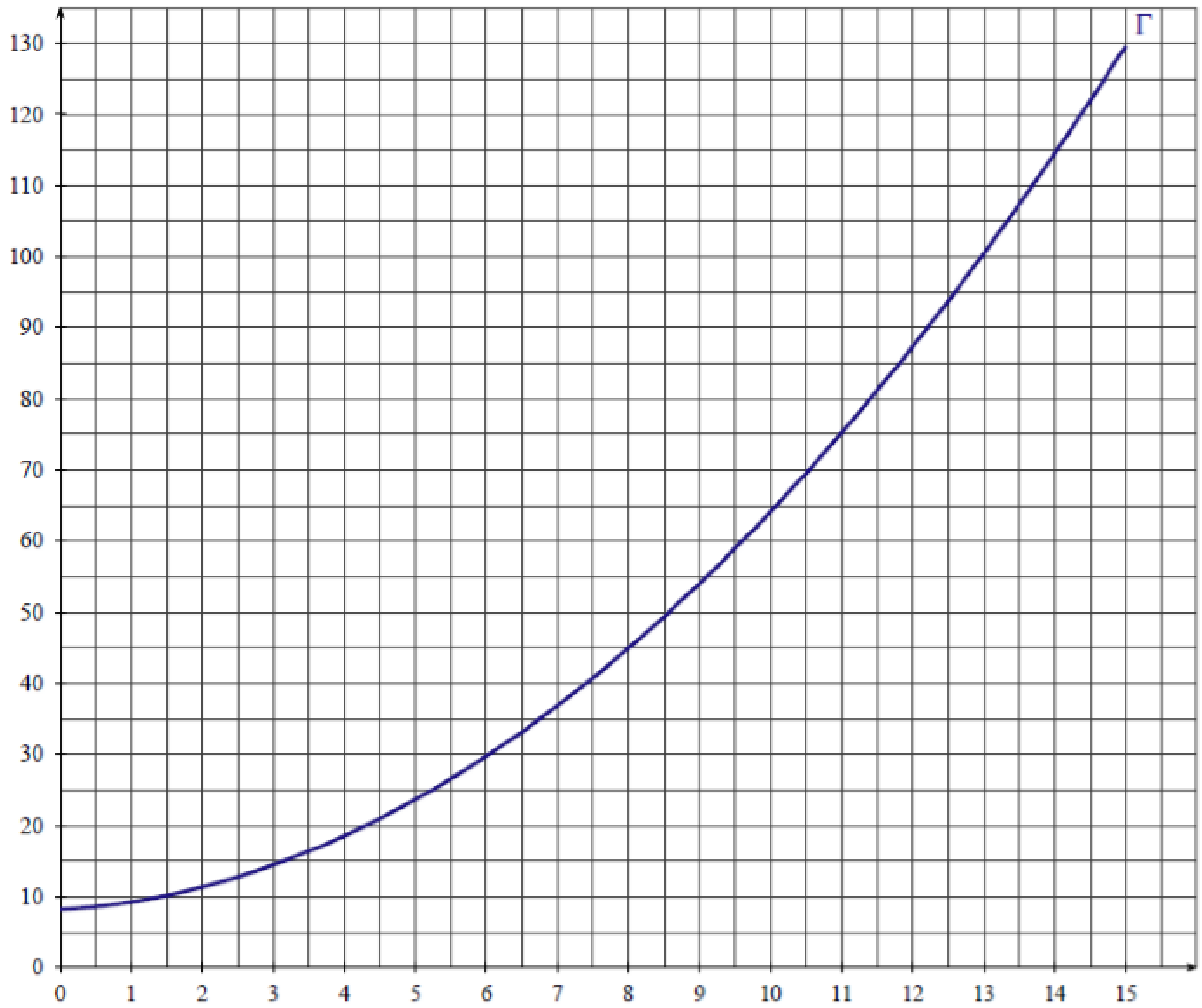
$$C(x)=0,5x^2+0,6x+8,16$$

On admet que chaque millier d'articles fabriqués est vendu au prix de 8 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?
2. On désigne par $R(x)$ le montant en **milliers** d'euros de la **recette mensuelle** obtenue pour la vente de $x$ milliers d'articles du produit «Champion». On a donc $R(x)=8x$.
   **a)** Tracer dans le repère donné en annexe la courbe D représentative de la fonction recette.
   **b)** Par lecture graphique déterminer :
   - l'intervalle dans lequel doit se situer la production $x$ pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
   - la production $x_0$ pour laquelle le bénéfice est maximal.
3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend $x$ milliers d'articles.
   **a)** Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend $x$ milliers d'articles, est donné par $B(x)=-0,5x^2+7,4x-8,16$ avec $x\in]0;15]$.
   **b)** Signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).
   **c)** Étudier les variations de la fonction $B$ sur $]0;15]$.

**NOM : …………………**

**<u>ANNEXE</u> : CORRIGE – Notre Dame de La Merci**



**CORRIGE – Notre Dame de La Merci - *Montpellier***

**Exercice 1 :** *Racines, forme factorisée, tableau de signes, tableau de variations de polynôme :* ***(6 pts)***

$P(x)=x^2+5x-36$ Discriminant : $\Delta=5^2-4\times1\times(-36)=25+144=169=13^2$

Deux racines : $x_1=\dfrac{-5-13}{2\times1}=\dfrac{-18}{2}=-9$ et $x_2=\dfrac{-5+13}{2\times1}=\dfrac{8}{2}=4$

Forme factorisée : $P(x)=(x-(-9))\times(x-4)=(x+9)(x-4)$

$a=1$ donc $a>0$ donc le polynôme est orienté « vers le haut »

Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines :

$x^2+5x-36\geq0$ si $x\in]-\infty;-9]\cup[4;+\infty[$

$x^2+5x-36\leq0$ si $x\in[-9;4]$

Tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-9$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+5x-36$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$a=1$ donc $a>0$ donc le polynôme est orienté « vers le haut »

→le sommet de la parabole a pour abscisse $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-5}{2\times1}=-\dfrac{5}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\dfrac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+5x-36$ | | ↘ | $-\dfrac{169}{4}$ | ↗ | |

$$P\left(-\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2}\right)^2+5\times\left(-\frac{5}{2}\right)-36=\frac{25}{4}-\frac{25}{2}-36=\frac{25}{4}-\frac{50}{4}-\frac{144}{4}=-\frac{169}{4}$$

$Q(x)=-3x^2-6x+24$ Discriminant : $\Delta=(-6)^2-4\times(-3)\times24=36+288=324=18^2$

Deux racines : $x_1=\dfrac{-(-6)-18}{2\times(-3)}=\dfrac{-12}{-6}=2$ et $x_2=\dfrac{-(-6)+18}{2\times(-3)}=\dfrac{24}{-6}=-4$

Forme factorisée : $Q(x)=-3(x-2)\times(x-(-4))=-3(x-2)(x+4)$

$a=-3$ donc $a<0$ donc le polynôme est orienté « vers le bas »

Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines :

$-3x^2-6x+24\geq0$ si $x\in[-4;2]$

$-3x^2-6x+24\leq0$ si $x\in]-\infty;-4]\cup[2;+\infty[$

Tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x^2-6x+24$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$a=-3$ donc $a<0$ donc le polynôme est orienté « vers le bas »

→le sommet de la parabole a pour abscisse $\frac{-b}{2a}=\frac{-(-6)}{2\times(-3)}=\frac{6}{-6}=-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3x^2-6x+24$ | | ↗ | $27$ | ↘ | |

$Q(-1)=-3\times(-1)^2-6\times(-1)+24=-3+6+24=27$

**Exercice 2 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{-3x^2+5x+8}{6-2x}\geq 0$. ***(4 pts)***

**Etude du numérateur** :

Discriminant : $\Delta=5^2-4\times(-3)\times 8=25+96=121=11^2$

Deux racines : $x_1=\frac{-5-11}{2\times(-3)}=\frac{-16}{-6}=\frac{8}{3}\simeq 2{,}67$

$x_2=\frac{-5+11}{2\times(-3)}=\frac{6}{-6}=-1$

$a=-3$ donc $a<0$ donc le polynôme est orienté « vers le bas »

Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines :

$-3x^2+5x+8\geq 0$ si $x\in\left[-1;\frac{8}{3}\right]$

$-3x^2+5x+8\leq 0$ si $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\frac{8}{3};+\infty\right[$

**Etude du dénominateur** : $6-2x>0$

$\Leftrightarrow -2x>-6$

$\Leftrightarrow x<\frac{-6}{-2}$

$\Leftrightarrow x<3$

**Tableau de signes** : La valeur interdite est $x=3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{8}{3}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x^2+5x+8$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $6-2x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\frac{-3x^2+5x+8}{6-2x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $+$ | |

$\frac{-3x^2+5x+8}{6-2x}\geq 0$ si $x\in\left[-1;\frac{8}{3}\right]\cup\left]3;+\infty\right[$

**Exercice 3 :** Trouver deux entiers consécutifs (qui se suivent) dont le produit est égal à 4 970 ***(3 pts)***

Soit $x$ le plus petit de ces deux entiers : le suivant est $x+1$. Ainsi :

$x(x+1)=4970$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 4970 = 0$

Discriminant : $\Delta = 1^2 - 4\times1\times(-4970) = 1 + 19\,880 = 19\,881 = 141^2$

Deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-141}{2\times1} = \dfrac{-142}{2} = -71$ et $x_2 = \dfrac{-1+141}{2\times1} = \dfrac{1}{2}40 = 70$

Les solutions sont $-71$ et $-70$ ou $70$ et $71$.

**Exercice 4 :** **Optimisation de bénéfice** ***(10 pts)***

Une entreprise fabrique un produit « Champion ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.

Le **coût total**, exprimé en **milliers** d'euros, de fabrication de *x* **milliers** d'articles est modélisé par la fonction *C* définie sur $]0;15]$ par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$$

On admet que chaque millier d'articles fabriqués est vendu au prix de 8 €.

**4.** Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?

→**Pour 4 000 articles :** $4\times8 - C(4) = 32 - \left(0,5\times4^2 + 0,6\times4 + 8,16\right) = 13,44$ €

→**Pour 12 000 articles :** $12\times8 - C(12) = 96 - \left(0,5\times12^2 + 0,6\times12 + 8,16\right) = 8,64$ €

**5.** On désigne par $R(x)$ le montant en **milliers** d'euros de la **recette mensuelle** obtenue pour la vente de *x* milliers d'articles du produit «Champion». On a donc $R(x) = 8x$.

**c)** Tracer dans le repère donné en annexe la courbe D représentative de la fonction recette.
→droite tracée en rouge

**d)** Par lecture graphique déterminer :
L'entreprise réalise un bénéfice positif si la production *x* est environ comprise entre 1,2 et 13,6 soit environ entre 1200 et 13600 articles.
Le bénéfice semble maximal pour une production $x_0$ environ égale à 7,3 soit environ 7300 articles.

**6.** On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend *x* milliers d'articles.

**d)** Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend *x* milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$ avec $x \in ]0;15]$.

$$B(x) = R(x) - C(x) = 8x - \left(0,5x^2 + 0,6x + 8,16\right) = 8x - 0,5x^2 - 0,6x - 8,16 = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$$

**e)** Signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).

Discriminant : $\Delta = 7,4^2 - 4\times(-0,5)\times(-8,16) = 38,44 = 6,2^2$

Deux racines : $x_1 = \dfrac{-7,4-6,2}{2\times(-0,5)} = \dfrac{-13,6}{-1} = 13,6$ et $x_2 = \dfrac{-7,4+6,2}{2\times(-0,5)} = \dfrac{-1,2}{-1} = 1,2$

Le bénéfice est positif si $x \in ]1,2;13,6[$ soit une prod. comprise entre 1200 et 13600 articles

**f)** Étudier les variations de la fonction *B* sur $]0;15]$.

→ $a = -0,5$ donc $a < 0$ donc le polynôme associé à la fonction *B* est orienté « vers le bas »

Son sommet est donné par $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-7,4}{2\times(-0,5)} = \dfrac{-7,4}{-1} = 7,4$

Ainsi la fonction B est croissante si $x \in ]0;7,4]$ et décroissante si $x \in ]7,4;15]$.

Le **bénéfice est maximal** pour 7400 articles fabriqués et vendus chaque mois.

Ce **bénéfice maximal** est donné par $B(7,4) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16 = 19,22$ soit 19 220 €.

**ANNEXE : CORRIGE – Notre Dame de La Merci**