Exercices sur le productivité d'entreprises

Exercice 1 : Optimisation de bénéfice

Une entreprise fabrique chaque jour x objets avec $x \in [0\ ;\ 60]$.

Le coût total de production de ces objets, exprimé en euros, est donné par $f(x) = x^2 - 20x + 200$

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $x \in [0\ ;\ 60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer $f(0)$ et $f(60)$.

   On rappelle que l'extremum d'une parabole est obtenu pour $x = \frac{-b}{2a}$*, nul besoin ici de chercher les racines de ce polynôme.*

2. Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 34 euros. Calculer, en fonction de x, la recette R(x).

3. Justifier que le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x objets est donné, pour $x \in [0\ ;\ 60]$, par : $g(x) = -x^2 + 54x - 200$.

4. Étudier les variations de g sur l'intervalle $x \in [0\ ;\ 60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer g(0) et g(60).

   On rappelle que l'extremum d'une parabole est obtenu pour $x = \frac{-b}{2a}$*, nul besoin ici de chercher les racines de ce polynôme.*

5. En déduire la quantité à produire permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?

6. Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 0$.

   Déduire de la question précédente les quantités que l'entreprise doit produire et vendre pour que la production soit rentable.

Exercice 2 : Optimisation de bénéfice

Une entreprise fabrique un produit « Champion ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.

Le **coût total**, exprimé en **milliers** d'euros, de fabrication de x **milliers** d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$$

On admet que chaque millier d'articles fabriqués est vendu au prix de 8 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?

2. On désigne par $R(x)$ le montant en **milliers** d'euros de la **recette mensuelle** obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit «Champion». On a donc $R(x) = 8x$.

a) Tracer dans le repère donné en annexe la courbe D représentative de la fonction recette.

b) Par lecture graphique déterminer :

- l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
- la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

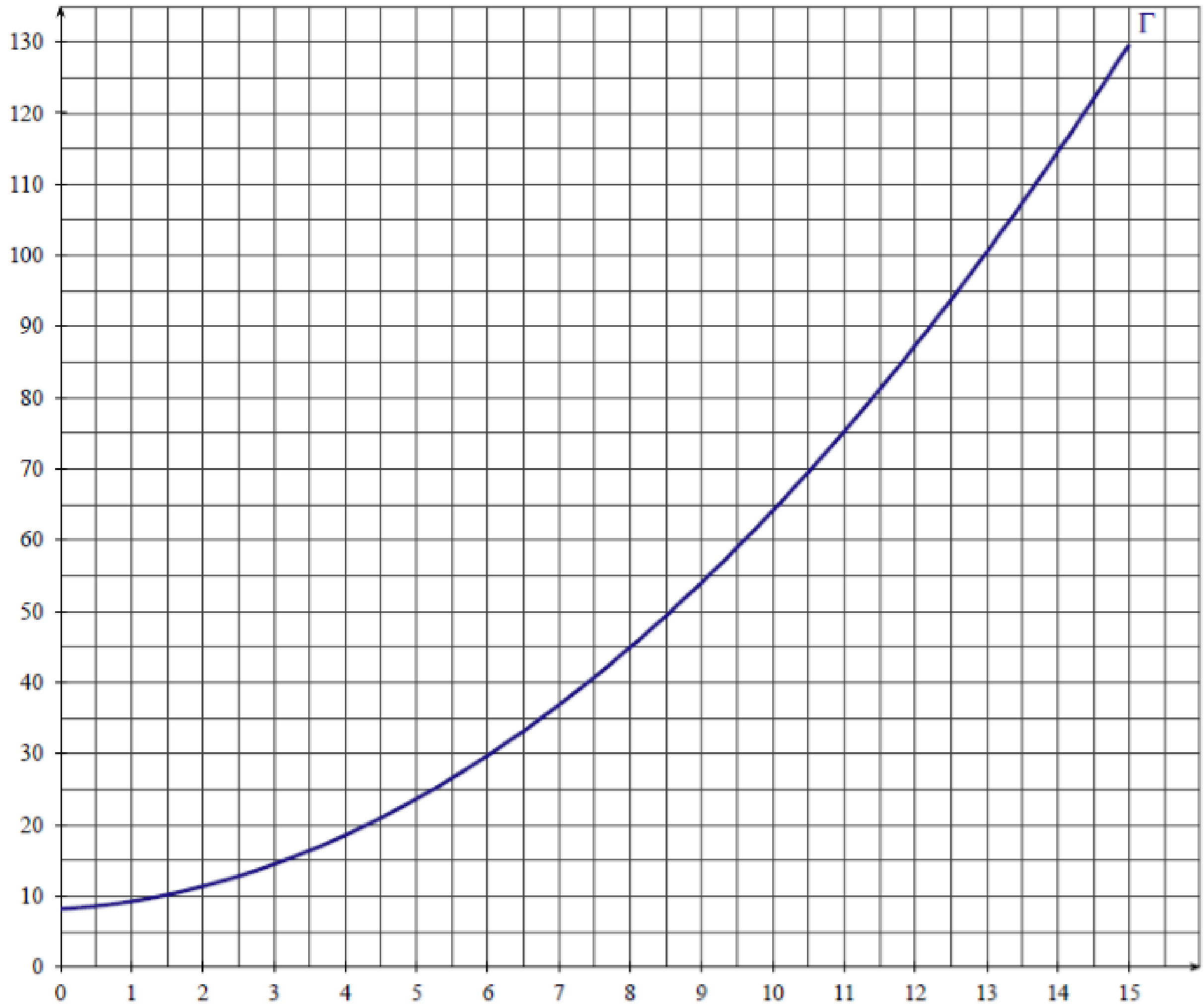
3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.

a) Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$ avec $x \in]0;15]$.

b) Signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).

c) Étudier les variations de la fonction B sur $]0;15]$.

ANNEXE : Notre Dame de La Merci



CORRIGE - Notre Dame de La Merci – Montpellier

<u>Exercice 1 :</u> Optimisation de bénéfice

Une entreprise fabrique chaque jour x objets avec $x \in [0 ; 60]$.

Le coût total de production de ces objets, exprimé en euros, est donné par $f(x) = x^2 - 20x + 200$

1. $f(x) = x^2 - 20x + 200$: $a > 0$ donc la parabole est orientée « vers le haut » et son extremum est obtenu pour $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-20)}{2} = 10$:

→ f est décroissante pour tout $x \in [0 ; 10]$ et croissante pour tout $x \in [10 ; 60]$.

$f(0) = 0^2 - 20 \times 0 + 200 = 200$; $f(60) = 60^2 - 20 \times 60 + 200 = 3600 - 1200 + 200 = 2600$

$f(10) = 10^2 - 20 \times 10 + 200 = 100 - 200 + 200 = 100$

x	0		10		60
f	200	↘	100	↗	2600

2. Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 34 euros. La recette est : $R(x) = 34x$

3. Le bénéfice est la différence entre la recette et les coûts, donc pour tout $x \in [0 ; 60]$:

$$g(x) = R(x) - f(x) = 34x - \left(x^2 - 20x + 200\right) = 34x - x^2 + 20x - 200 = -x^2 + 54x - 200$$

4. $g(x) = -x^2 + 54x - 200$: $a < 0$ donc la parabole est orientée « vers le bas » et son extremum est obtenu pour $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-54}{2 \times (-1)} = 27$:

→ g est croissante pour tout $x \in [0 ; 27]$ et décroissante pour tout $x \in [27 ; 60]$.

$g(0) = -0^2 + 54 \times 0 - 200 = -200$; $g(60) = -60^2 + 54 \times 60 - 200 = -3600 + 3240 - 200 = -560$

$g(27) = -27^2 + 54 \times 27 - 200 = -729 + 1458 - 200 = 529$

x	0		27		60
g	-200	↗	529	↘	-560

5. Le bénéfice est maximal pour une quantité de 27 objets. Ce bénéfice maximal est égal à 529 €.

6. $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 54x - 200 \geq 0$: $\Delta = 54^2 - 4 \times (-1) \times (-200) = 2\,916 - 800 = 2\,116 = 46^2$

$x_1 = \frac{-54 - 46}{2 \times (-1)} = \frac{-100}{-2} = 50$ et $x_2 = \frac{-54 + 46}{2 \times (-1)} = \frac{-8}{-2} = 4$:

$g(x) \geq 0$ si $x \in [4;50]$: la production soit rentable entre 5 et 49 objets.

<u>Exercice 2 :</u> Optimisation de bénéfice

Une entreprise fabrique un produit « Champion ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.

Le **coût total**, exprimé en **milliers** d'euros, de fabrication de x **milliers** d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ par :

$C(x)=0,5x^2+0,6x+8,16$

On admet que chaque millier d'articles fabriqués est vendu au prix de 8 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?

   →**Pour 4 000 articles :** $4\times 8-C(4)=32-\left(0,5\times 4^2+0,6\times 4+8,16\right)=13,44$ €

   →**Pour 12 000 articles :** $12\times 8-C(12)=96-\left(0,5\times 12^2+0,6\times 12+8,16\right)=8,64$ €

2. On désigne par $R(x)$ le montant en **milliers** d'euros de la **recette mensuelle** obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit «Champion». On a donc $R(x)=8x$.

   c) Tracer dans le repère donné en annexe la courbe D représentative de la fonction recette.
   →droite tracée en rouge

   d) Par lecture graphique déterminer :
   L'entreprise réalise un bénéfice positif si la production x est environ comprise entre 1,2 et 13,6 soit environ entre 1200 et 13600 articles.
   Le bénéfice semble maximal pour une production x_0 environ égale à 7,3 soit environ 7300 articles.

3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.

   d) Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x)=-0,5x^2+7,4x-8,16$ avec $x\in\left]0;15\right]$.

   $B(x)=R(x)-C(x)=8x-\left(0,5x^2+0,6x+8,16\right)=8x-0,5x^2-0,6x-8,16=-0,5x^2+7,4x-8,16$

   e) Signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).

   Discriminant : $\Delta=7,4^2-4\times(-0,5)\times(-8,16)=38,44=6,2^2$

   Deux racines : $x_1=\dfrac{-7,4-6,2}{2\times(-0,5)}=\dfrac{-13,6}{-1}=13,6$ et $x_2=\dfrac{-7,4+6,2}{2\times(-0,5)}=\dfrac{-1,2}{-1}=1,2$

   Le bénéfice est positif si $x\in\left]1,2;13,6\right[$ soit une prod. comprise entre 1200 et 13600 articles

   f) Étudier les variations de la fonction B sur $\left]0;15\right]$.

   → $a=-0,5$ donc $a<0$ donc le polynôme associé à la fonction B est orienté « vers le bas »

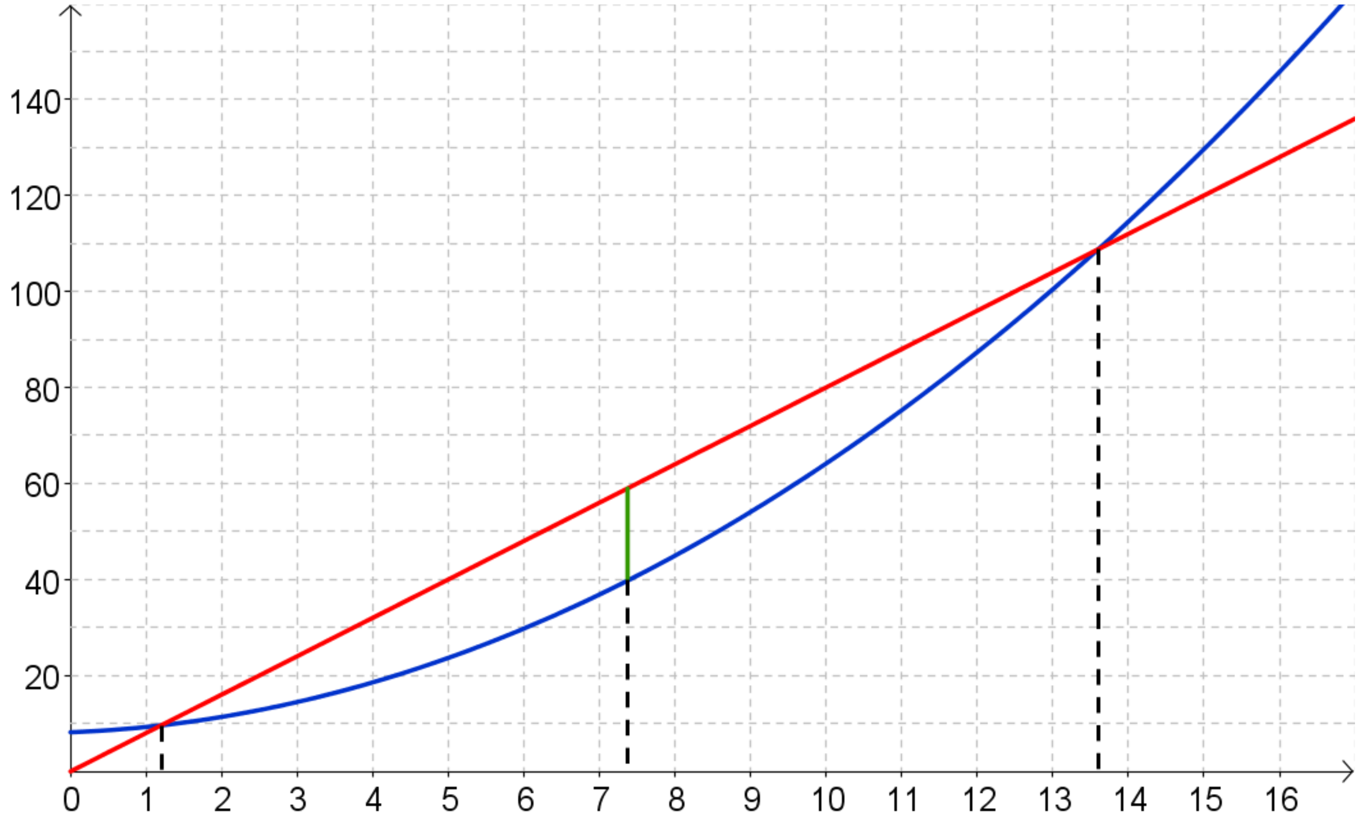
   Son sommet est donné par $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-7,4}{2\times(-0,5)}=\dfrac{-7,4}{-1}=7,4$

   Ainsi la fonction B est croissante si $x\in\left]0;7,4\right]$ et décroissante si $x\in\left]7,4;15\right]$.

   Le **bénéfice est maximal** pour 7400 articles fabriqués et vendus chaque mois.

   Ce **bénéfice maximal** est donné par $B(7,4)=-0,5x^2+7,4x-8,16=19,22$ soit 19 220 €.

<u>ANNEXE</u> : CORRIGE – Notre Dame de La Merci


140
120
100
80
60
40
20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16