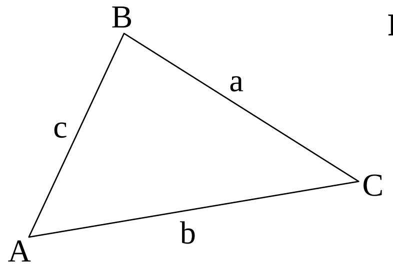
Rappel - Relations d'Al Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos \mathrm{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C}$$



Rappel - Formule « des 3 sinus » :

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \mathrm{A}}{a} = \frac{\sin \mathrm{B}}{b} = \frac{\sin \mathrm{C}}{c}$$

(S est l'aire du triangle)

EXERCICE 5A.1

a. Construire un triangle ABC tel que AC = 3, AB = 6 et $\mathrm{A} = \frac{\pi}{6}$.

b. Déterminer la valeur exacte de BC.

c. En déduire une valeur approchée à 10^{-1} près de la mesure de l'angle B.

EXERCICE 5A.2

a. ABC est un triangle tel que AB = 4 ; AC = 2 ; $\mathrm{A} = \frac{\pi}{3}$. Déterminer BC.

b. ABC est un triangle tel que AB = 3 ; BC = 2 ; $\mathrm{B} = \frac{3\pi}{4}$. Déterminer AC.

c. ABC est un triangle tel que BC = 5 ; AC = 3 ; $\mathrm{C} = 15°$. Déterminer AB.

d. ABC est un triangle tel que AB = 1 ; AC = 2 ; $\mathrm{A} = 60°$. Déterminer BC.

EXERCICE 5A.3

a. ABC est un triangle tel que AB = 4 ; $\mathrm{A} = 60°$; $\mathrm{B} = 35°$. Déterminer AC et BC.

b. ABC est un triangle tel que BC = 3 ; $\mathrm{C} = 30°$; $\mathrm{B} = 100°$. Déterminer AB et AC.

c. ABC est un triangle tel que BC = 5 ; $\mathrm{A} = 40°$; $\mathrm{C} = 50°$. Déterminer AB et AC.

d. ABC est un triangle tel que BC = 5 ; AC = 3 ; $\mathrm{C} = 15°$. Déterminer l'aire de ABC.

e. ABC est un triangle tel que AB = 3 ; BC = 2 ; $\mathrm{B} = \frac{3\pi}{4}$. Déterminer l'aire de ABC.

EXERCICE 5A.4

Une plaque d'aluminium triangulaire fait 7 mm d'épaisseur. Ses côtés mesurent 9 cm, 15 cm et 21 cm. Déterminer la masse de cette plaque sachant que la masse volumique de l'aluminium est 2,7 g/cm^3.

EXERCICE 5A.5

Un avion A est repéré à la verticale d'une ville faisant route au Nord à la vitesse de 800 Km/h. Au même instant un avion B est repéré à 300 km au nord de A et suivant une route « Sud 60° Ouest » à une vitesse de 600 Km/h et à la même altitude.

a. Faire une figure.

b. Calculer la distance qui sépare les deux avions dix minutes plus tard.

c. Calculer le laps de temps qui s'écoulera à compter du repérage jusqu'au moment où la distance séparant les deux appareils sera minimale.

Conseil : Choisir 100 Km comme unité de distance et l'heure comme unité de temps.

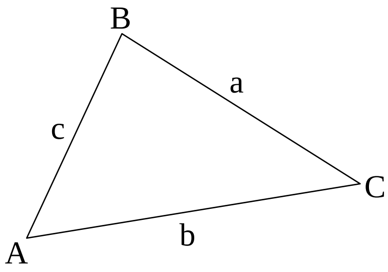
CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – CORRIGE

Rappel - Relations d'Al Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$



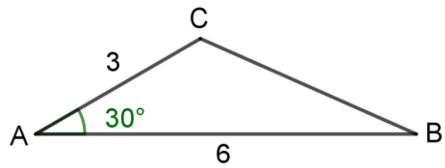
Rappel - Formule « des 3 sinus » :

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$$

(S est l'aire du triangle)

EXERCICE 5A.1

a. *Construire un triangle ABC tel que AC = 3, AB = 6 et* $\widehat{A} = \frac{\pi}{6}$.



b. *Déterminer la valeur exacte de BC.*

FORMULE D'AL KASHI :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\widehat{A} = 6^2 + 3^2 - 2\times 6\times 3\times\cos\frac{\pi}{6}$$

$$BC^2 \simeq 13{,}8231 \quad \text{donc} \quad BC \simeq \sqrt{13{,}8231} \simeq 3{,}72$$

c. *En déduire une valeur approchée à* 10^{-1} *près de la mesure de l'angle* $\widehat{B}$.

LOI DES SINUS :

$$\frac{\sin\widehat{A}}{BC} = \frac{\sin\widehat{B}}{AC} \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{3{,}72} = \frac{\sin\widehat{B}}{3} \Leftrightarrow \sin\widehat{B} = \frac{3\times\frac{1}{2}}{3{,}72} = \frac{25}{62} \Leftrightarrow \widehat{B} = \sin^{-1}\left(\frac{25}{62}\right) \simeq 0{,}415 \text{ rad.}$$

EXERCICE 5A.2 : FORMULES D'AL KASHI :

a. *ABC est un triangle tel que AB = 4 ; AC = 2 ;* $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$. *Déterminer BC.*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\widehat{A} = 4^2 + 2^2 - 2\times 4\times 2\times\cos\frac{\pi}{3} = 16 + 4 - 16\times\frac{1}{2} = 12$$

$$BC = \sqrt{12} \simeq 3{,}46$$

b. *ABC est un triangle tel que AB = 3 ; BC = 2 ;* $\widehat{B} = \frac{3\pi}{4}$. *Déterminer AC.*

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times\cos\widehat{B} = 3^2 + 2^2 - 2\times 3\times 2\times\cos\frac{3\pi}{4} = 9 + 4 - 12\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 13 + 6\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{13 + 6\sqrt{2}} \simeq 4{,}64$$

c. *ABC est un triangle tel que BC = 5 ; AC = 3 ;* $\widehat{C} = 15°$. *Déterminer AB.*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\times AC\times BC\times\cos\widehat{C} = 3^2 + 5^2 - 2\times 3\times 5\times\cos 15 = 9 + 25 - 30\cos 15 = 34 - 30\cos 15$$

$$AB = \sqrt{34 - 30\cos 15} \simeq 2{,}24$$

d. ABC est un triangle tel que AB = 1 ; AC = 2 ; $\widehat{A} = 60°$. Déterminer BC.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\widehat{A} = 1^2 + 2^2 - 2\times 1\times 2\times\cos\frac{\pi}{3} = 1 + 4 - 4\times\frac{1}{2} = 5 - 2 = 3$$

$$BC = \sqrt{3} \simeq 1{,}73$$

EXERCICE 5A.3 : LOI DES SINUS :

a. *ABC est un triangle tel que AB = 4 ;* $\widehat{A} = 60°$ *;* $\widehat{B} = 35°$. *Déterminer AC et BC.*

La somme des angles d'un triangle vaut 180° donc $\widehat{C} = 85°$.

$$\frac{\sin\widehat{B}}{AC} = \frac{\sin\widehat{C}}{AB} \Leftrightarrow \frac{\sin 35}{AC} = \frac{\sin 85}{4} \Leftrightarrow AC = \frac{4\times\sin 35}{\sin 85} \simeq 2{,}3$$

$$\frac{\sin \mathrm{A}}{\mathrm{BC}}=\frac{\sin \mathrm{C}}{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sin 60}{\mathrm{BC}}=\frac{\sin 85}{4} \Leftrightarrow \mathrm{BC}=\frac{4\times\sin 60}{\sin 85}\simeq 3,48$$

b. *ABC est un triangle tel que BC = 3 ; C = 30° ; B = 100°. Déterminer AB et AC.*

La somme des angles d'un triangle vaut 180° donc $\mathrm{A}=50°$.

$$\frac{\sin \mathrm{C}}{\mathrm{AB}}=\frac{\sin \mathrm{A}}{\mathrm{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 30}{\mathrm{AB}}=\frac{\sin 50}{3} \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\frac{3\times\sin 30}{\sin 50}\simeq 1,96$$

$$\frac{\sin \mathrm{B}}{\mathrm{AC}}=\frac{\sin \mathrm{A}}{\mathrm{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 100}{\mathrm{AC}}=\frac{\sin 50}{3} \Leftrightarrow \mathrm{AC}=\frac{3\times\sin 100}{\sin 50}\simeq 3,86$$

c. *ABC est un triangle tel que BC = 5 ; A = 40° ; C = 50°. Déterminer AB et AC.*

La somme des angles d'un triangle vaut 180° donc $\mathrm{B}=90°$: le triangle ABC est rectangle en B.

$$\frac{\sin \mathrm{C}}{\mathrm{AB}}=\frac{\sin \mathrm{A}}{\mathrm{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 50}{\mathrm{AB}}=\frac{\sin 40}{5} \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\frac{5\times\sin 50}{\sin 40}\simeq 5,96$$

$$\frac{\sin \mathrm{B}}{\mathrm{AC}}=\frac{\sin \mathrm{A}}{\mathrm{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 90}{\mathrm{AC}}=\frac{\sin 40}{5} \Leftrightarrow \mathrm{AC}=\frac{5\times\sin 90}{\sin 40}\simeq 7,78$$

d. *ABC est un triangle tel que BC = 5 ; AC = 3 ; C = 15°. Déterminer l'aire de ABC.*

Loi des sinus : $\dfrac{2S}{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{BC}}=\dfrac{\sin \mathrm{C}}{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow 2S=\mathrm{AC}\times\mathrm{BC}\times\sin \mathrm{C} \Leftrightarrow S=\dfrac{3\times5\times\sin 15}{2}\simeq 1,94$.

e. *ABC est un triangle tel que AB = 3 ; BC = 2 ; B = $\frac{3\pi}{4}$. Déterminer l'aire de ABC.*

Loi des sinus : $\dfrac{2S}{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{BC}}=\dfrac{\sin \mathrm{B}}{\mathrm{AC}} \Leftrightarrow 2S=\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}\times\sin \mathrm{B} \Leftrightarrow S=\dfrac{3\times2\times\sin\frac{3\pi}{4}}{2}=3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\simeq 2,12$.

EXERCICE 5A.4

Une plaque d'aluminium triangulaire fait 7 mm d'épaisseur. Ses côtés mesurent 9 cm, 15 cm et 21 cm.
Déterminer la masse de cette plaque sachant que la masse volumique de l'aluminium est 2,7 g/cm³.

Définissons un triangle ABC tel que AB = 9 , AC = 15 et BC = 21.
Nous devons calculer un angle de ce triangle avec la **formule d'Al Kashi** :

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos \mathrm{A} \Leftrightarrow 21^2=9^2+15^2-2\times9\times15\times\cos \mathrm{A}$$

$$\Leftrightarrow 441=81+225-270\cos \mathrm{A} \Leftrightarrow 441-81-225=-270\cos \mathrm{A}$$

$$\Leftrightarrow 135=-270\cos \mathrm{A} \Leftrightarrow \frac{135}{-270}=\cos \mathrm{A} \Leftrightarrow \cos \mathrm{A}=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A}=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

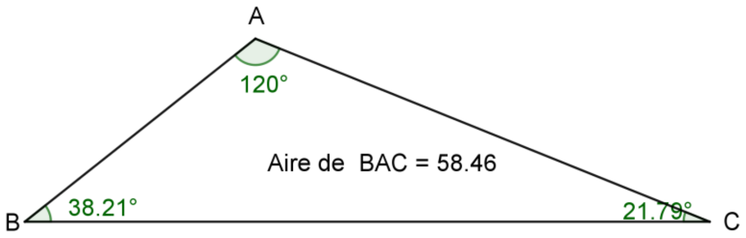
Loi des sinus : $\dfrac{2S}{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{BC}}=\dfrac{\sin \mathrm{A}}{\mathrm{BC}} \Leftrightarrow S=\dfrac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\sin \mathrm{A}}{2}=\dfrac{9\times15\times\sin\frac{2\pi}{3}}{2}=\dfrac{135\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{135\times\sqrt{3}}{4}$

Le volume de la plaque est égal à la surface multipliée par l'épaisseur, les unités étant en cm :

$$V=\frac{135\times\sqrt{3}}{4}\times0,7\,\mathrm{cm}^3$$

Or $\quad$ $\text{masse volumique}=\dfrac{\text{masse}}{\text{volume}}$ donc la masse cherchée est :

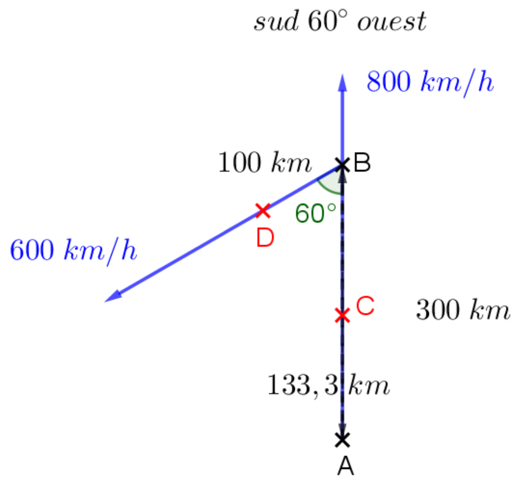
$$\text{masse}=\text{masse volumique}\times\text{volume}=2,7\times\frac{135\times\sqrt{3}}{4}\times0,7\simeq110,5\,\mathrm{cm}^3$$



EXERCICE 5A.5

Un avion A est repéré à la verticale d'une ville faisant route au Nord à la vitesse de 800 Km/h. Au même instant un avion B est repéré à 300 km au nord de A et suivant une route « Sud 60° Ouest » à une vitesse de 600 Km/h et à la même altitude.

a. *Faire une figure.*



b. *Calculer la distance qui sépare les deux avions dix minutes plus tard.*

10 minutes plus tard, les avions A et B sont respectivement situés sur les points C et D.

10 minutes $=\frac{1}{6}$ d'heure donc, en sachant que : $v=\frac{d}{t} \Leftrightarrow d=v\times t$

$$\text{AC}=\frac{1}{6}\times 800=\frac{400}{3}\simeq 133,33\ \text{km}$$

$$\text{BD}=\frac{1}{6}\times 600=100\ \text{km.}$$

On se place dans le triangle BCD tel que :

$$\text{DBC}=60°\ \text{rad},\ \text{BD}=100\ \text{km}$$

et $\text{BC}=300-\frac{400}{3}=\frac{500}{3}\simeq 166,7\ \text{km.}$

D'après la formule d'Al Kashi :

$$\text{CD}^2=\text{BC}^2+\text{BD}^2-2\times\text{BC}\times\text{BD}\times\cos\text{B}=\left(\frac{500}{3}\right)^2+100^2-2\times\frac{500}{3}\times 100\times\cos 60\simeq 21111,111$$

$$\text{CD}\simeq\sqrt{21111,111}\simeq 145,3\ \text{km.}$$

c. *Calculer le laps de temps qui s'écoulera à compter du repérage jusqu'au moment où la distance séparant les deux appareils sera minimale.*

En choisissant 100 km comme unité de distance et l'heure comme unité de temps

On pose $x=\text{CD}$. D'après la formule d'Al Kashi :

$$x^2=\text{BC}^2+\text{BD}^2-2\times\text{BC}\times\text{BD}\times\cos\text{B}$$

$$\Leftrightarrow\ x=\sqrt{\text{BC}^2+\text{BD}^2-2\times\text{BC}\times\text{BD}\times\cos\text{B}}$$

Soit t le temps cherché (en heures) :

$$\mathrm{BC}=\mathrm{AB}-\mathrm{AC}=3-8\times t$$
$$\mathrm{BD}=6\times t$$

Or la distance BC est positive donc :

$$3-8\times t\geq 0 \iff -8\times t\geq -3 \iff t\leq\frac{-3}{-8} \iff t\leq\frac{3}{8}$$

La distance x cherchée est une fonction du temps, on peut poser, pour tout réel $t\geq 0$, la fonction f définie par :

$$f(t)=\sqrt{(3-8t)^2+(6t)^2-2\times(3-8t)\times(6t)\times\cos 60}$$
$$\iff f(t)=\sqrt{9-48t+64t^2+36t^2-18t+48t^2}$$
$$\iff f(t)=\sqrt{148t^2-66t+9}$$

Cette fonction est dérivable sur $\left[0;\frac{3}{8}\right]$ avec : $\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$$f'(t)=\frac{2\times 148\times t-66}{2\sqrt{148t^2-66t+9}}=\frac{148\times t-33}{\sqrt{148t^2-66t+9}}$$

Le dénominateur étant strictement positif, on étudie le signe du numérateur :

$$f'(t)>0 \iff 148\times t-33>0$$
$$\iff 148\times t>33$$
$$\iff t>\frac{33}{148}$$

Soit environ $13,378$ minutes.

On obtient le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{33}{148}$		$\frac{3}{8}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	$1,28$	$\nearrow$	$2,25$

Avec : $f(0)=3$, $f\left(\frac{33}{148}\right)\simeq 1,2814$ et $f\left(\frac{3}{8}\right)\simeq 2,25$

La distance minimale est :

$$f\left(\frac{33}{148}\right)\simeq 1,2814$$

Soit environ 128,14 km.

En choisissant 1 km comme unité de distance et l'heure comme unité de temps

On pose $x=\mathrm{CD}$. D'après la formule d'Al Kashi :

$$x^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{BD}^2-2\times\mathrm{BC}\times\mathrm{BD}\times\cos\mathrm{B}$$
$$\iff x=\sqrt{\mathrm{BC}^2+\mathrm{BD}^2-2\times\mathrm{BC}\times\mathrm{BD}\times\cos\mathrm{B}}$$

Soit t le temps cherché (en heures) :

$$\mathrm{BC}=\mathrm{AB}-\mathrm{AC}=300-800\times t$$
$$\mathrm{BD}=600\times t$$

Or la distance BC est positive donc :

$$300-800\times t\geq 0 \iff -800\times t\geq -300 \iff t\leq\frac{-300}{-800} \iff t\leq\frac{3}{8}$$

La distance x cherchée est une fonction du temps, on peut poser, pour tout réel $t \geq 0$, la fonction f définie par :

$$f(t)=\sqrt{(300-800\times t)^2+(600\times t)^2-2\times(300-800\times t)\times(600\times t)\times\cos 60}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(t)=\sqrt{90\,000-480\,000\times t+640\,000\times t^2+360\,000\times t^2-2\times 600\times t\times(300-800\times t)\times\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(t)=\sqrt{90\,000-480\,000\times t+1\,000\,000\times t^2-180\,000\times \mathrm{t}+480\,000\times t^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(t)=\sqrt{1\,480\,000\times t^2-660\,000\times t+90\,000}$$

Cette fonction est dérivable sur $\left[0;\frac{3}{8}\right]$:

$$f'(t)=\frac{2\times 1\,480\,000\times t-660\,000}{2\sqrt{1\,480\,000\times t^2-660\,000\times t+90\,000}}=\frac{1\,480\,000\times t-330\,000}{\sqrt{1\,480\,000\times t^2-660\,000\times t+90\,000}}$$

Le dénominateur étant strictement positif, on étudie le signe du numérateur :

$$f'(t)>0 \Leftrightarrow 1\,480\,000\times t-330\,000>0$$

$$\Leftrightarrow 1\,480\,000\times t>330\,000$$

$$\Leftrightarrow t>\frac{330\,000}{1\,480\,000}$$

Soit environ : $\Leftrightarrow t>\frac{33}{148}$

On retrouve le travail précédent …..

En choisissant 100 km comme unité de distance et l'heure comme unité de temps ET en étudiant le carré de la distance

On pose $x=\mathrm{CD}$. D'après la formule d'Al Kashi :

$$x^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{BD}^2-2\times\mathrm{BC}\times\mathrm{BD}\times\cos\mathrm{B}$$

Soit t le temps cherché (en heures) :

$$\mathrm{BC}=\mathrm{AB}-\mathrm{AC}=3-8\times t$$

$$\mathrm{BD}=6\times t$$

Or la distance BC est positive donc :

$$3-8\times t\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -8\times t\geq -3 \quad\Leftrightarrow\quad t\leq\frac{-3}{-8} \quad\Leftrightarrow\quad t\leq\frac{3}{8}$$

La distance x^2 cherchée est une fonction du temps, on peut poser, pour tout réel $t\geq 0$, la fonction f définie par :

$$f(t)=(3-8t)^2+(6t)^2-2\times(3-8t)\times(6t)\times\cos 60$$

$$\Leftrightarrow \quad f(t)=9-48t+64t^2+36t^2-18t+48t^2$$

$$\Leftrightarrow \quad f(t)=148t^2-66t+9$$

Cette fonction est dérivable sur $\left[0;\frac{3}{8}\right]$:

$$f'(t)=2\times 148\times t-66=296\times t-66$$

Le dénominateur étant strictement positif, on étudie le signe du numérateur :

$$f'(t)\geq 0 \Leftrightarrow 296\times t-66\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 296\times t\geq 66$$

$$\Leftrightarrow t\geq\frac{66}{296} \quad\Leftrightarrow\quad t\geq\frac{33}{148}$$

Soit environ $13{,}378$ minutes.

On obtient le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{33}{148}$		$\frac{3}{8}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	9	$\searrow$	$1,64$	$\nearrow$	$5,06$

Avec : $f(0)=9$, $f\left(\dfrac{33}{148}\right)\simeq 1,6419$ et $f\left(\dfrac{3}{8}\right)=5,0625$

La distance minimale est :

$$\sqrt{1,6419}\simeq 1,2814$$

Soit environ 128,14 km.