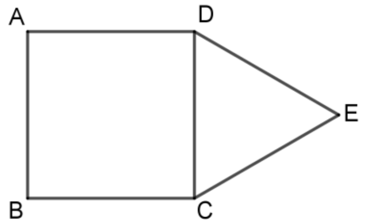
Questions simples et indépendantes visant à tester vos connaissances sur le produit scalaire.
(source : M. Laroche)

Exercice 2G.1 :



ABCD est un carré de côté *a* et CDE est un triangle équilatéral. On s'intéresse au triangle BDE.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$ en fonction de *a*.
   On pourra utiliser une projection orthogonale.

   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE}$ en fonction de *a*.

   c. En déduire l'égalité $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE} = \frac{a^2}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

   d. Utiliser ce résultat pour calculer BE^2. On pourra décomposer $\overrightarrow{BE}$ en $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}$ puis en déduire BE

   e. Calculer, en fonction de *a*, l'aire exacte du triangle ECD.
2. Calculer l'aire exacte du triangle BDE.

Exercice 2G.2 :

EFGH est un rectangle, avec $EH = a$ et $EF = \frac{3a}{2}$; M est le milieu de $[FG]$ et K est défini par $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$; L est le projeté orthogonal de K sur (EM).

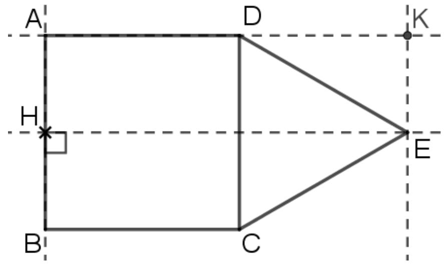
1. Calculer, en fonction de *a*, les produits scalaires $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{KE}$.
2. En utilisant des relations de Chasles, montrer que $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM} = \frac{5a^2}{4}$.
3. En exprimant d'une autre façon le produit scalaire $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}$, en déduire la distance EL en fonction de *a*.
4. Déterminer une mesure en degrés de l'angle $\widehat{KEM}$.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 2G.1 :

ABCD est un carré de côté a et CDE est un triangle équilatéral. On s'intéresse au triangle BDE.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.



1. **a.** *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$ *en fonction de a.*
On pourra utiliser une projection orthogonale.

Soit H le projeté orthogonal du point E sur la droite (AB).

Dans un triangle équilatéral, les droites remarquables sont confondues donc H est le milieu de $[AB]$ et $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{DE}$ sur la droite (AB).

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = AB \times AH = a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$.

b. *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE}$ *en fonction de a.*

Soit K le projeté orthogonal du point E sur la droite (AD).

Le triangle CDE est équilatéral donc $\widehat{CDE} = 60°$, on obtient : $\widehat{EDK} = 30°$.

Dans le triangle rectangle KDE, sachant que $KE = \frac{a}{2}$, on obtient :

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DE} = -AD \times DE \times \cos\widehat{EDK} = -a \times a \times \cos 30 = -a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c. *En déduire l'égalité* $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE} = \frac{a^2}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = -a^2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$$

d. *Utiliser ce résultat pour calculer* BE^2. *On pourra décomposer* $\overrightarrow{BE}$ *en* $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}$ *puis en déduire* BE.

$$BE^2 = \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BE} = \left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\right).\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\right) = BD^2 + 2\times\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DE} + DE^2$$

D'après le théorème de Pythagore : $BD^2 = BA^2 + AD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Ainsi :

$$BE^2 = 2a^2 - 2\times\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE} + a^2 = 2a^2 - 2\times\frac{a^2}{2}\left(1-\sqrt{3}\right) + a^2 = 2a^2 - a^2 + \sqrt{3}a^2 + a^2$$

$$BE^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)a^2$$

e. *Calculer, en fonction de a, l'aire exacte du triangle ECD.*

D'après le théorème de Pythagore, la hauteur du triangle équilatéral ECD mesure :

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\times\sqrt{3}}{2}$$

Donc l'aire du triangle ECD vaut :

$$\frac{a\times\frac{a\times\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\times\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{a^2\times\sqrt{3}}{4}$$

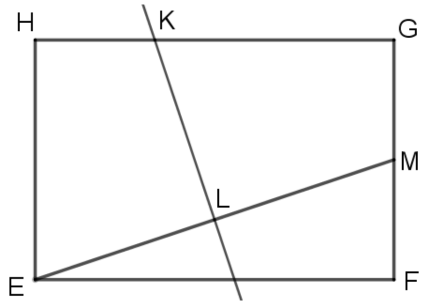
2. *Calculer l'aire exacte du triangle BDE.*

D'après la loi des aires :

$$\mathcal{A}_{BDE} = \frac{DB\times DE\times\sin\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}\right)}{2} = \frac{a\sqrt{2}\times a\times\sin(45+60)}{2} = \frac{\sqrt{2}\times a^2\times\sin(105)}{2}$$

Exercice 2G.2 :

EFGH est un rectangle, avec $\mathrm{EH}=a$ *et* $\mathrm{EF}=\dfrac{3a}{2}$ *; M est le milieu de* $[\mathrm{FG}]$ *et K est défini par* $\overrightarrow{\mathrm{HK}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{HG}}$ *; L est le projeté orthogonal de K sur* (EM).



1. *Calculer, en fonction de a, les produits scalaires* $\overrightarrow{\mathrm{EF}}.\overrightarrow{\mathrm{EM}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{EH}}.\overrightarrow{\mathrm{KE}}$.

Par projections orthogonales, on obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}.\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\mathrm{EF}\times\mathrm{EF}=\frac{3a}{2}\times\frac{3a}{2}=\frac{9a^2}{4}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EH}}.\overrightarrow{\mathrm{KE}}=-\mathrm{EH}\times\mathrm{HE}=-a^2$$

2. *En utilisant des relations de Chasles, montrer que* $\overrightarrow{\mathrm{EK}}.\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\dfrac{5a^2}{4}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{EK}}.\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{EH}}+\overrightarrow{\mathrm{HK}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{FM}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{EH}}.\overrightarrow{\mathrm{FM}}+\overrightarrow{\mathrm{HK}}.\overrightarrow{\mathrm{EF}}=a\times\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{3a}{2}\times\frac{3a}{2}=\frac{a^2}{2}+\frac{3a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$$

3. *En exprimant d'une autre façon le produit scalaire* $\overrightarrow{\mathrm{EK}}.\overrightarrow{\mathrm{EM}}$, *en déduire la distance EL en fonction de a.*

Par projection orthogonale et en utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{EK}}.\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\mathrm{EL}\times\mathrm{EM}=\mathrm{EL}\times\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\mathrm{EL}\times\sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\mathrm{EL}\times\sqrt{\frac{10a^2}{4}}=\mathrm{EL}\times a\times\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ainsi $\quad\mathrm{EL}\times\dfrac{a\sqrt{10}}{2}=\dfrac{5a^2}{4}\iff\mathrm{EL}=\dfrac{5a^2}{4}\times\dfrac{2}{a\sqrt{10}}=\dfrac{5a}{2\sqrt{10}}=\dfrac{5\sqrt{10}\times a}{20}=\dfrac{\sqrt{10}\times a}{4}$

4. *Déterminer une mesure en degrés de l'angle* $\widehat{KEM}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{EK}}.\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\mathrm{EK}\times\mathrm{EM}\times\cos\widehat{\mathrm{KEM}}$$

Or d'après le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{EK}=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{3}\times\frac{3a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Donc $\quad\cos\widehat{\mathrm{KEM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{EK}}.\overrightarrow{\mathrm{EM}}}{\mathrm{EK}\times\mathrm{EM}}=\dfrac{\dfrac{5a^2}{4}}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}a\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}a}=\dfrac{\dfrac{5a^2}{4}}{\dfrac{5\sqrt{2}}{4}a^2}=\dfrac{5}{4}\times\dfrac{4}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'où : $\widehat{\mathrm{KEM}}=\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=45°=\dfrac{\pi}{4}\,rad$