Notre Dame de la Merci – Montpellier

Contrôle sur la géométrie repérée

Exercice 1 :

Soit *d* est la droite d'équation : $5x+2y+5=0$.

1) Trouver un vecteur directeur $\vec{u}$ à *d*.
2) Trouver un vecteur normal $\vec{n}$ à *d*.
3) Trouver une équation de la droite Δ passant par $\mathrm{A}(-2;3)$ et perpendiculaire à *d*.
4) Trouver une équation de la droite Δ' passant par $\mathrm{B}(7;1)$ et parallèle à *d*.

Exercice 2 :

On considère trois points $\mathrm{A}(2;5)$, $\mathrm{B}(-3;1)$ et $\mathrm{C}(4;-2)$.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) en utilisant le déterminant.
2) Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Exercice 3 :

Dans un repère orthonormal, le cercle *C* a pour équation : $x^2+y^2-6x-5y+2=0$.

Déterminer son centre et son rayon.

Exercice 4 :

On considère les points $\mathrm{A}(4;1)$ et $\mathrm{B}(-5;-7)$.

Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$ en utilisant le produit scalaire.

Exercice 5 :

On considère le cercle (C) d'équation cartésienne $x^2+y^2-2x-2y-23=0$ de centre $\mathrm{A}(1;1)$ passant par le point $\mathrm{C}(5;4)$.

1) Déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle passant par le point C.
2) Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle (C) avec la droite (D) d'équation $-x+3y+3=0$.

Notre Dame de la Merci – *Montpellier*
Contrôle sur la géométrie repérée - CORRIGE

Exercice 1 :

Soit d est la droite d'équation : $5x+2y+5=0$.

5) *Trouver un vecteur directeur* $\vec{u}$ *à d.*

$$\vec{u}\begin{vmatrix}-b\\a\end{vmatrix} \text{ soit } \vec{u}\begin{vmatrix}-2\\5\end{vmatrix}.$$

6) *Trouver un vecteur normal* $\vec{n}$ *à d.*

$$\vec{n}\begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix} \text{ soit } \vec{n}\begin{vmatrix}5\\2\end{vmatrix}.$$

7) Trouver une équation de la droite Δ passant par $A(-2;3)$ et perpendiculaire à *d*.

Avec le déterminant :

La droite Δ de vecteur directeur $\vec{n}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix}x+2\\y-3\end{vmatrix}$ et $\vec{n}$ soient colinéaires :

$$\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{n}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+2 & 5\\ y-3 & 2\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2(x+2)-5(y-3)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+4-5y+15=0 \Leftrightarrow 2x-5y+19=0$$

Avec le produit scalaire :

La droite Δ de vecteur normal $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix}x+2\\y-3\end{vmatrix}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow -2(x+2)+5(y-3)=0 \Leftrightarrow -2x-4+5y-15=0$$
$$\Leftrightarrow -2x+5y-19=0 \Leftrightarrow 2x-5y+19=0$$

8) Trouver une équation de la droite Δ' passant par $B(7;1)$ et parallèle à *d*.

Avec le déterminant :

La droite Δ' de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{BM}\begin{vmatrix}x-7\\y-1\end{vmatrix}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires :

$$\det\left(\overrightarrow{BM},\vec{u}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-7 & -2\\ y-1 & 5\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 5(x-7)-(-2)(y-1)=0$$
$$\Leftrightarrow 5x-35+2y-2=0 \Leftrightarrow 5x+2y-37=0$$

Avec le produit scalaire :

La droite Δ' de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{BM}\begin{vmatrix}x-7\\y-1\end{vmatrix}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux :

$$\overrightarrow{BM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow 5(x-7)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow 5x-35+2y-2=0$$
$$\Leftrightarrow 5x+2y-37=0$$

Exercice 2 :

On considère trois points $A(2;5)$, $B(-3;1)$ *et* $C(4;-2)$.

3) *Déterminer une équation cartésienne de la droite* (AB) *en utilisant le déterminant.*

La droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-3-2\\1-5\end{vmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-5\\-4\end{vmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix}x-2\\y-5\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires :

$$\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-2 & -5\\ y-5 & -4\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -4(x-2)-(-5)(y-5)=0$$
$$\Leftrightarrow -4x+8+5y-25=0 \Leftrightarrow -4x+5y-17=0 \Leftrightarrow 4x-5y+17=0$$

4) *Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal de C sur la droite* (AB).

Le point $\mathrm{H}(x_\mathrm{H};y_\mathrm{H})$ vérifie, en sachant que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{vmatrix}-5\\-4\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\begin{vmatrix}x_\mathrm{H}-4\\y_\mathrm{H}+2\end{vmatrix}$:

$$\begin{cases}\mathrm{H}\in(\mathrm{AB})\\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x_\mathrm{H}-5y_\mathrm{H}+17=0\\ -5(x_\mathrm{H}-4)-4(y_\mathrm{H}+2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x_\mathrm{H}-5y_\mathrm{H}+17=0\\ -5x_\mathrm{H}+20-4y_\mathrm{H}-8=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x_\mathrm{H}-5y_\mathrm{H}=-17\\ -5x_\mathrm{H}-4y_\mathrm{H}=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\times 5\\ \times 4\end{vmatrix}\begin{cases}20x_\mathrm{H}-25y_\mathrm{H}=-85\\ -20x_\mathrm{H}-16y_\mathrm{H}=-48\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}L_1\\ L_1+L_2\end{vmatrix}\begin{cases}20x_\mathrm{H}-25y_\mathrm{H}=-85\\ -25y_\mathrm{H}-16y_\mathrm{H}=-85-48\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}20x_\mathrm{H}-25y_\mathrm{H}=-85\\ -41y_\mathrm{H}=-133\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}20x_\mathrm{H}=-85+25y_\mathrm{H}=-85+25\times\dfrac{133}{41}=-\dfrac{160}{41}\\ y_\mathrm{H}=\dfrac{-133}{-41}=\dfrac{133}{41}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_\mathrm{H}=-\dfrac{160}{41}\times\dfrac{1}{20}=-\dfrac{8}{41}\\ y_\mathrm{H}=\dfrac{133}{41}\end{cases}$$

Soit $\mathrm{H}\left(-\dfrac{8}{41};\dfrac{133}{41}\right)$.

Exercice 3 :

Dans un repère orthonormal, le cercle C a pour équation : $x^2+y^2-6x-5y+2=0$.
Déterminer son centre et son rayon.

$$x^2+y^2-6x-5y+2=0 \Leftrightarrow x^2-2\times x\times 3+3^2-3^2+y^2-2\times y\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2-9+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{53}{4}=\left(\frac{\sqrt{53}}{2}\right)^2$$

Les coordonnées du centre du cercle sont $\left(3;\dfrac{5}{2}\right)$ et le rayon mesure $\dfrac{\sqrt{53}}{2}$.

Exercice 4 : *On considère les points* $\mathrm{A}(4;1)$ *et* $\mathrm{B}(-5;-7)$.

Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$ *en utilisant le produit scalaire.*

Le cercle est constitué de points $\mathrm{M}(x;y)$ distincts de A et B tels que le triangle ABM soit rectangle avec :

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{vmatrix}x-4\\y-1\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BM}}\begin{vmatrix}x+5\\y+7\end{vmatrix}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\overrightarrow{\mathrm{BM}}=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+5)+(y-1)(y+7)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x-4x-20+y^2+7y-y-7=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+x+6y-27=0$$

Exercice 5 :

On considère le cercle (C) *d'équation cartésienne* $x^2+y^2-2x-2y-23=0$ *de centre* $\mathrm{A}(1;1)$ *passant par le point* $\mathrm{C}(5;4)$.

3) *Déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle passant par le point C.*

La droite cherchée passe par le point C et possède $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{vmatrix}5-1\\4-1\end{vmatrix}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{vmatrix}4\\3\end{vmatrix}$ comme vecteur normal.

Cette droite est constituée de l'ensemble des points $M(x;y)$ distincts de C tels que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CM}$ avec :

$$\overrightarrow{CM}\left|\begin{matrix} x-5 \\ y-4 \end{matrix}\right..$$

Ainsi : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CM}=0 \Leftrightarrow 4(x-5)+3(y-4)=0 \Leftrightarrow 4x-20+3y-12=0$

$\Leftrightarrow 4x+3y-32=0$

4) *Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle (C) avec la droite (D) d'équation $-x+3y+3=0$.*

Les points d'intersection $M(x_M;y_M)$ vérifient :

$$\begin{cases} -x_M+3y_M+3=0 \\ {x_M}^2+{y_M}^2-2x_M-2y_M-23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_M=-3y_M-3 \\ {x_M}^2+{y_M}^2-2x_M-2y_M-23=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=3y_M+3 \\ (3y_M+3)^2+{y_M}^2-2(3y_M+3)-2y_M-23=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=3y_M+3 \\ 9{y_M}^2+18y_M+9+{y_M}^2-6y_M-6-2y_M-23=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=3y_M+3 \\ 10{y_M}^2+10y_M-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=3y_M+3 \\ {y_M}^2+y_M-2=0 \end{cases}$$

$\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=1+8=9=3^2$ donc deux solutions :

$$y_1=\frac{-1-3}{2\times1}=-2 \quad \text{et} \quad y_2=\frac{-1+3}{2\times1}=1$$

Or $x_M=3y_M+3$ donc :

$$x_1=3(-2)+3=-3 \quad \text{et} \quad x_2=3\times1+3=6.$$

Les coordonnées des points d'intersection sont :

$(-3;-2)$ et $(6;1)$.