

Exercice 1 :

Un concessionnaire vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine.

Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de voitures vendues. X suit la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2	3	4
$p(X=k)$	0,26	0,23	a	0,15	0,05

- Calculer la valeur de a .
- a) Calculer $p(X > 2)$.
b) Calculer $p(X \leq 3)$.
- Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat.
- Calculer la variance et l'écart-type de cette variable aléatoire.

Exercice 2.

Dans une maternité, on estime qu'à la naissance, la probabilité qu'un enfant soit une fille est égale à 0,51. On choisit de manière indépendante trois enfants nés dans cette maternité. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de filles parmi ces trois enfants.

- Représenter l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.
- Calculer la probabilité qu'exactement deux enfants soient des filles.
- Décrire l'événement $X = 0$ et calculer sa probabilité.
- Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X .

x	0	1	2	3
$p(X=x)$				

- Calculer l'espérance de cette variable aléatoire et interpréter.
- Calculer la variance et l'écart-type de cette variable aléatoire.

Exercice 3 :

Dans tout l'exercice, on donnera la valeur exacte des résultats.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est 85 %.

A l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

La chaîne A fabrique le tiers de la production totale.

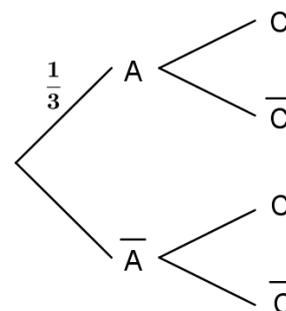
A la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l'évènement « la tablette de chocolat provient de la chaîne de production

A » ;

C l'évènement « la tablette de chocolat est commercialisable ».

- Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :
- Calculer la probabilité que la tablette soit commercialisable et provienne de la chaîne A.
- Montrer que la probabilité que la tablette soit commercialisable est 0,96.



- On considère que la chocolaterie gagne 0,10 euro par tablette commercialisable et perd 0,30 euro par tablette non commercialisable. Soit X la variable aléatoire égale au gain de la chocolaterie par tablette produite.
 - Déterminer la loi de probabilité de X .
 - Peut-on considérer que la chocolaterie perd de l'argent ? Justifier.

Notre Dame de la Merci – Montpellier
CORRIGE du Contrôle sur les variables aléatoires

Exercice 1 :

Un concessionnaire vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine.

Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de voitures vendues. X suit la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2	3	4
$p(X=k)$	0,26	0,23	a	0,15	0,05

1. Calculer la valeur de a .

On sait que : $p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) = 1$

$$\Leftrightarrow 0,26 + 0,23 + a + 0,15 + 0,05 = 1$$

$$\Leftrightarrow 0,69 + a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 1 - 0,69 = 0,31$$

2. a) Calculer $p(X > 2)$.

$$p(X > 2) = p(X=3) + p(X=4)$$

$$= 0,15 + 0,05$$

$$= 0,2$$

b) Calculer $p(X \leq 3)$.

$$p(X \leq 3) = 1 - p(X=4)$$

$$= 1 - 0,05$$

$$= 0,95$$

3. Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat.

$$E(X) = 0 \times 0,26 + 1 \times 0,23 + 2 \times 0,31 + 3 \times 0,15 + 4 \times 0,05$$

$$= 0,23 + 0,62 + 0,45 + 0,2$$

$$= 1,5$$

Sur un très grand nombre de semaines, le concessionnaire vend en moyenne 1,5 voitures par semaine.

4. Calculer la variance et l'écart-type de cette variable aléatoire.

$$V(X) = 0^2 \times 0,26 + 1^2 \times 0,23 + 2^2 \times 0,31 + 3^2 \times 0,15 + 4^2 \times 0,05 - 1,5^2$$

$$= 0,23 + 1,24 + 1,35 + 0,8 - 2,25$$

$$= 3,62 - 2,25$$

$$= 1,37$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,37} \approx 1,17.$$

Exercice 2.

Dans une maternité, on estime qu'à la naissance, la probabilité qu'un enfant soit une fille est égale à 0,51. On choisit de manière indépendante trois enfants nés dans cette maternité. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de filles parmi ces trois enfants.

1. Représenter l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.

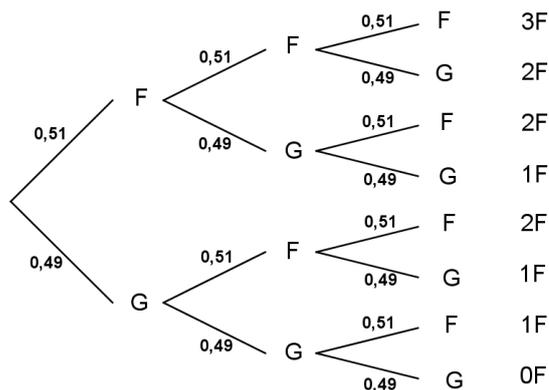
Soit G l'évènement « l'enfant est un garçon » et F l'évènement « l'enfant est une fille ».

2. Calculer la probabilité qu'exactement deux enfants soient des filles.

$$p(X=2) = p(\text{FFG}) + p(\text{FGF}) + p(\text{GFF})$$

$$= 3 \times (0,51 \times 0,51 \times 0,49)$$

$$\approx 0,382$$



3. Décrire l'événement $X = 0$ et calculer sa probabilité.

Les trois enfants sont des garçons.

$$p(X=0) = p(\text{GGG}) = 0,49 \times 0,49 \times 0,49 \approx 0,118.$$

4. Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X .

$$\begin{aligned} p(X=1) &= p(\text{FGG}) + p(\text{GFG}) + p(\text{GGF}) \\ &= 3 \times (0,51 \times 0,49 \times 0,49) \\ &\approx 0,367 \end{aligned}$$

$$p(X=3) = p(\text{FFF}) = 0,51 \times 0,51 \times 0,51 \approx 0,133$$

Loi de probabilité de X :

x	0	1	2	3	Total
$p(X=x)$	0,118	0,367	0,382	0,133	1

5. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire et interpréter.

$$E(X) = 0 \times 0,118 + 1 \times 0,367 + 2 \times 0,382 + 3 \times 0,133 \approx 1,53$$

En moyenne, sur 3 naissances, on compte 1,53 filles.

Soit sur 300 naissances, on compte en moyenne 153 filles.

6. Calculer la variance et l'écart-type de cette variable aléatoire.

$$V(X) = 0^2 \times 0,118 + 1^2 \times 0,367 + 2^2 \times 0,382 + 3^2 \times 0,133 - 1,53^2 = 0,7511$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,7511} \approx 0,867.$$

Exercice 3 :

Dans tout l'exercice, on donnera la valeur exacte des résultats.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est 85 %.

A l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

La chaîne A fabrique le tiers de la production totale.

A la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l'évènement « la tablette de chocolat provient de la chaîne de production A »,

C l'évènement « la tablette de chocolat est commercialisable ».

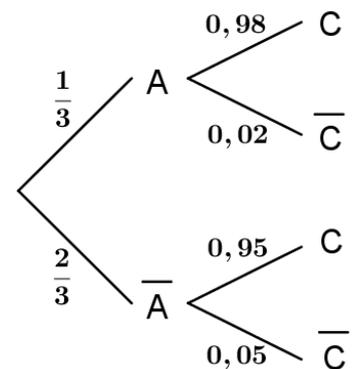
5. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :

$$p(A) = \frac{1}{3} \text{ donc } p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$p_A(C) = 0,98 \text{ et } p_B(C) = 0,95$$

Donc $p_A(\bar{C}) = 1 - p_A(C) = 0,02$

$$p_{\bar{A}}(\bar{C}) = 1 - p_{\bar{A}}(C) = 0,05$$



6. Calculer la probabilité que la tablette soit commercialisable et provienne de la chaîne A.

$$p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C) = \frac{1}{3} \times 0,98 = \frac{49}{150} \approx 0,327$$

7. Montrer que la probabilité que la tablette soit commercialisable est 0,96.

A et \bar{A} forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 p(C) &= p(A \cap C) + p(\bar{A} \cap C) \\
 &= p(A) \times p_A(C) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(C) \\
 &= \frac{1}{3} \times 0,98 + \frac{2}{3} \times 0,95 \\
 &= 0,96
 \end{aligned}$$

La probabilité que la tablette soit commercialisable est 0,96.

8. On considère que la chocolaterie gagne 0,10 euro par tablette commercialisable et perd 0,30 euro par tablette non commercialisable. Soit X la variable aléatoire égale au gain de la chocolaterie par tablette produite.

c) Déterminer la loi de probabilité de X .

X prend les valeurs $\{-0,30; 0,10\}$, d'où :

$$p(X = 0,10) = p(C) = 0,96$$

$$p(X = -0,30) = 1 - p(C) = 0,04$$

On obtient la loi de probabilité de X :

k	-0,30	0,10	Total
$p(X = k)$	0,04	0,96	1

d) Peut-on considérer que la chocolaterie perd de l'argent ? Justifier.

$$E(X) = -0,30 \times 0,04 + 0,10 \times 0,96 = 0,084$$

Sur une grande production de tablettes, la chocolaterie gagne en moyenne 0,084 euro par tablette fabriquée. Donc la chocolaterie ne perd pas d'argent.