La Merci
MONTPELLIER

Exercices sur les équations de cercles

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormal, le cercle C a pour équation : $x^2+y^2-2x-y+1=0$.
Déterminer son centre et son rayon.

Exercice 2 :

Dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), soit les points $A(1;2)$, $B(9;-2)$, $C(7;-4)$ et D tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$.

1) Démontrer que A, B, C, D sont sur un même cercle *C*.
2) Déterminer une équation de ce cercle *C*.
3) Démontrer que le cercle *C* est tangent à la droite (OA).
   Ecrire l'équation de la tangente en B à ce cercle.

Exercice 3 :

Trouver l'équation du cercle dans les cas suivants :

1) de centre $A(1;-2)$ et de rayon 5 ;
2) de centre $A(-1;2)$ et passant par $B(3;4)$;
3) de centre $A(1;-4)$ et tangent à l'axe des abscisses.

Exercice 4 :

Soit les points $I(4;-1)$ et $A(1;5)$. *C* est le cercle de centre I passant par A.

Démontrer que la droite *d* d'équation $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ est tangente en A au cercle *C*.

Exercice 5 :

On considère le cercle *C* d'équation $x^2+y^2+x+y-8=0$ et le cercle *C*' de centre $O'\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

1) Déterminez le centre O et le rayon *r* de *C* puis déterminez une équation de *C*'. Tracez les 2 cercles.
2) Calculez les coordonnées des points d'intersection de ces 2 cercles.
3) Soit $A(1;2)$. Vérifiez que A est un des points d'intersection de *C* et *C*' si vous ne l'avez pas trouvé dans les solutions du 2.
   Déterminez les équations des tangentes à chacun des cercles au point A.

Exercice 6 :

1) Montrer que l'équation $x^2+y^2-2x-8y-8=0$ est celle d'un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.
2) Calculer les coordonnées des points d'intersection *A* et *B* de (C) avec la droite (D) d'équation $x+2y+1=0$.

Exercice 7 :

On considère un segment $[AB]$ mesurant 3 cm, le cercle *C* de centre A et de rayon 4 cm.

On appelle :

- E le point d'intersection de $[AB)$ et du cercle *C*
- C le point du cercle *C* tel que $BC=3,5$ cm
- D le point du cercle *C* de l'autre côté (AB) tel que $BD=2$ cm.

Démontrer que les points B, C et D sont alignés.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci - Montpellier

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormal, le cercle C a pour équation : $x^2+y^2-2x-y+1=0$.

Déterminer son centre et son rayon.

On transforme cette écriture à l'aide des identités remarquables :

$$x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2+y^2-2\times y\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)^2-1+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Ce cercle a pour centre le point $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et pour rayon $\frac{1}{2}$.

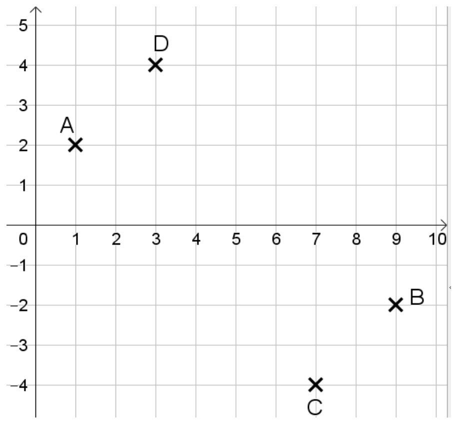
Exercice 2 :

Dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), soit les points $A(1;2)$, $B(9;-2)$, $C(7;-4)$ *et D tel que* $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$

1) *Démontrer que A, B, C, D sont sur un même cercle C.*

Si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ avec $D(x;y)$, $\overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix}x-1\\y-2\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{CB}\left|\begin{matrix}9-7\\-2-(-4)\end{matrix}\right.$ soit $\overrightarrow{CB}\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right.$, alors :

$$\begin{cases}x-1=2\\y-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+1=3\\y=2+2=4\end{cases}\text{ donc } D(3;4).$$



Un schéma est utile pour trouver la méthode la plus simple :

→il semble que le quadrilatère ACBD soit un rectangle.

→de l'intérêt de tester la réciproque du théorème de Pythagore

$$AD^2=(3-1)^2+(4-2)^2=4+4=8$$

$$AB^2=(9-1)^2+(-2-2)^2=64+16=80$$

$$BD^2=(3-9)^2+(4-(-2))^2=36+36=72$$

$$AC^2=(7-1)^2+(-4-2)^2=36+36=72$$

$$CD^2=(3-7)^2+(4-(-4))^2=16+64=80$$

Les diagonales sont de même longueur donc ce quadrilatère est un parallélogramme.

$$AD^2+BD^2=AB^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ce parallélogramme possède un angle droit.

Ainsi, ACBD est un rectangle dont les diagonales se coupent en leur milieu O et sont de même longueur

OA = $OA=OB=OC=OD$ et les points A, B, C et D sont sur un même cercle.

2) *Déterminer une équation de ce cercle C.*

Les diagonales du rectangle sont des diamètres du cercle.

Première méthode :

Le centre du cercle est le milieu de AB :

Ses coordonnées sont :

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)\text{ soit }\left(\frac{1+9}{2};\frac{2+(-2)}{2}\right)\text{ soit }(5;0).$$

Le rayon R du cercle mesure la moitié d'un diamètre :

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} = 2\sqrt{5}$$

L'équation du cercle est :

$$(x-5)^2 + y^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \iff (x-5)^2 + y^2 = 20$$

Deuxième méthode :

Soit $M(x;y)$ un point du cercle C de diamètre $[AB]$:

$$\overrightarrow{MA}\begin{vmatrix} x-1 \\ y-2 \end{vmatrix}, \ \overrightarrow{MB}\begin{vmatrix} x-9 \\ y+2 \end{vmatrix}.$$

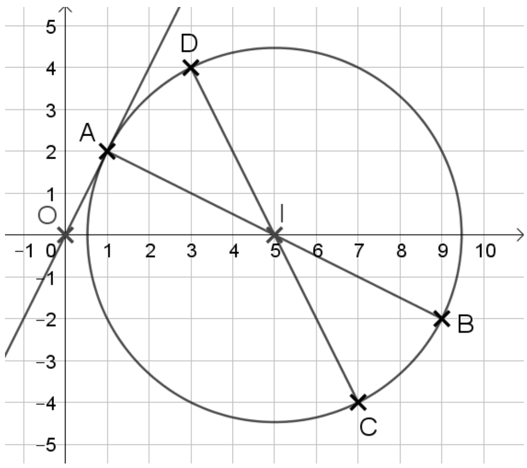
Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux donc :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$
$$\iff (x-1)(x-9)+(y-2)(y+2)=0$$
$$\iff x^2-9x-x+9+y^2+2y-2y-4=0$$
$$\iff x^2-10x+y^2+5=0$$
$$\iff x^2-2\times x\times 5+5^2-5^2+y^2+5=0$$
$$\iff (x-5)^2-25+y^2+5=0$$
$$\iff (x-5)^2+y^2=20$$

3) *Démontrer que le cercle C est tangent à la droite (OA).*

Ecrire l'équation de la tangente en B à ce cercle.

La tangente à un cercle en un point est une droite perpendiculaire au rayon passant par ce point.



$$\overrightarrow{IA}\begin{vmatrix} 1-5 \\ 2-0 \end{vmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{IA}\begin{vmatrix} -4 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OA}\begin{vmatrix} 1-0 \\ 2-0 \end{vmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{OA}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{OA} = -4\times 1+2\times 2 = -4+4 = 0$$

Donc $(IA)\perp(OA)$ et le cercle C est tangent à (OA)

Equation de la tangente au cercle en B :

→le vecteur $\overrightarrow{IA}$ est un vecteur normal à cette tangente

Son équation est de la forme :

$$-4x+2y+c=0.$$

Or le point B appartient à cette tangente :

$$-4x_B+2y_B+c=0$$
$$\iff -4\times 9+2\times(-2)+c=0$$
$$\iff -36-4+c=0$$
$$\iff c=40$$

L'équation cherchée est :

$$-4x+2y+40=0 \iff -2x+y+20=0$$

Exercice 3 :

Trouver l'équation du cercle dans les cas suivants :

1) *de centre $A(1;-2)$ et de rayon 5 ;*

$$(x-1)^2+(y+2)^2=5^2 \iff x^2-2x+1+y^2+4y+4=25$$
$$\iff x^2+y^2-2x+4y-20=0$$

2) *de centre* $A(-1;2)$ *et passant par* $B(3;4)$ *;*

Le segment $[AB]$ est un rayon du cercle de longueur :

$$AB=\sqrt{(3-(-1))^2+(4-2)^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

L'équation du cercle est :

$$(x+1)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{20}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-4y+4=20$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y-15=0$$

3) *de centre* $A(1;-4)$ *et tangent à l'axe des abscisses.*

Soit H le point d'intersection entre le cercle et l'axe des abscisses : les droites (AH) et (Ox) sont perpendiculaires. Les coordonnées du centre $A(1;-4)$ donnent directement les coordonnées du point $H(1;0)$. Le rayon du cercle mesure alors :

$$AH=\sqrt{(1-1)^2+(0-(-4))^2}=\sqrt{16}=4.$$

L'équation du cercle est :

$$(x-1)^2+(y+4)^2=4^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+8y+16=16$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+8y+1=0$$

Exercice 4 :

Soit les points $I(4;-1)$ *et* $A(1;5)$*. C est le cercle de centre I passant par A.*

Démontrer que la droite d d'équation $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ *est tangente en A au cercle C.*

Vérifions que le point A appartient à la droite *d* :

$$\frac{1}{2}x_A+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}\times 1+\frac{9}{2}=\frac{10}{2}=5=y_A \text{ donc } A\in d.$$

Le rayon $[IA]$ est-il perpendiculaire à la droite *d* ?

$$\overrightarrow{IA}\begin{vmatrix}1-4\\5-(-1)\end{vmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{IA}\begin{vmatrix}-3\\6\end{vmatrix} \text{ ; un vecteur directeur de la droite } d \text{ est : } \vec{u}\begin{vmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{vmatrix} \text{ ou } \vec{u'}\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix} \text{ avec } \vec{u'}=2\vec{u}.$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{IA}.\vec{u}=-3\times 2+6\times 1=-6+6=0.$$

Ces vecteurs sont orthogonaux donc la droite *d* est bien une tangente au cercle passant par le point A.

Exercice 5 :

On considère le cercle C d'équation $x^2+y^2+x+y-8=0$ *et le cercle C' de centre* $O'\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ *et de rayon* $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

1) *Déterminez le centre O et le rayon r de C puis déterminez une équation de C'. Tracez les 2 cercles.*

$$x^2+y^2+x+y-8=0 \Leftrightarrow x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2+2\times y\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-8=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-8=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$$

Le cercle C est de centre $O\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et rayon $r=\sqrt{\frac{17}{2}}$.

L'équation du second cercle est :

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-3y+\frac{9}{4}=\frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-3y-1=0$$

2) *Calculez les coordonnées des points d'intersection de ces 2 cercles.*

Il faut résoudre :

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y-8=0 \\ x^2+y^2+2x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y-8=0 \\ x^2+y^2+2x-3y-1=x^2+y^2+x+y-8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y-8=0 \\ 2x-3y-1=x+y-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y-8=0 \\ x-4y+7=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4y-7)^2+y^2+(4y-7)+y-8=0 \\ x=4y-7 \end{cases}$$

Soit : $16y^2-56y+49+y^2+4y-7+y-8=0$

$\Leftrightarrow 17y^2-51y+34=0$

$\Leftrightarrow y^2-3y+2=0$

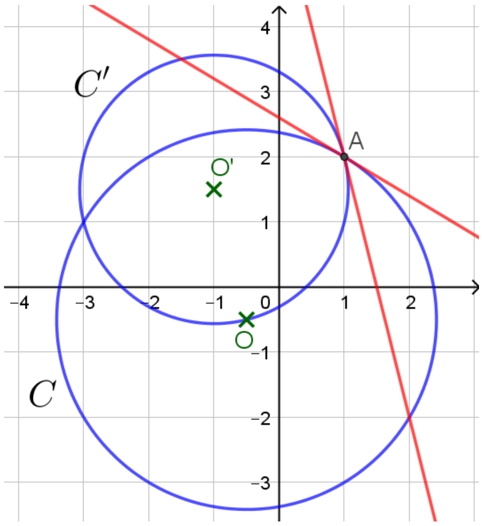
$\Delta=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1$ donc deux solutions :

$$y_1=\frac{3-1}{2\times1}=\frac{2}{2}=1 \text{ et } y_2=\frac{3+1}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$$

La relation $x=4y-7$ donne les abscisses des points d'intersection :

pour $y_1=1 \rightarrow x_1=4y_1-7=4\times1-7=-3$: soit le point de coordonnées $(-3;1)$,

pour $y_2=2 \rightarrow x_2=4y_2-7=4\times2-7=1$: soit le point de coordonnées $(1;2)$



3) *Soit $A(1;2)$. Vérifiez que A est un des points d'intersection de C et C' si vous ne l'avez pas trouvé dans les solutions du 2. Déterminez les équations des tangentes à chacun des cercles au point A.*

On cherche la droite orthogonale à C passant par A, soit $M(x;y)$ un point de cette droite :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AM}=0 \text{ avec } \overrightarrow{OA}\left|\begin{matrix} 1+\frac{1}{2} \\ 2+\frac{1}{2} \end{matrix}\right. \text{ soit } \overrightarrow{OA}\left|\begin{matrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{matrix}\right. \text{ et } \overrightarrow{AM}\left|\begin{matrix} x-1 \\ y-2 \end{matrix}\right.$$

Ainsi : $\frac{3}{2}(x-1)+\frac{5}{2}(y-2)=0 \Leftrightarrow 3(x-1)+5(y-2)=0 \Leftrightarrow 3x-3+5y-10=0$

$\Leftrightarrow 3x+5y-13=0$

On cherche la droite orthogonale à *C'* passant par A, soit $M(x;y)$ un point de cette droite :

$$\overrightarrow{O'A}.\overrightarrow{AM}=0 \text{ avec } \overrightarrow{O'A}\begin{vmatrix}1+1\\2-\frac{3}{2}\end{vmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{O'A}\begin{vmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{vmatrix}x-1\\y-2\end{vmatrix}$$

Ainsi : $2(x-1)+\frac{1}{2}(y-2)=0 \Leftrightarrow 4(x-1)+(y-2)=0 \Leftrightarrow 4x-4+y-2=0$

$\Leftrightarrow 4x+y-6=0$

Exercice 6 :

1) *Montrer que l'équation $x^2+y^2-2x-8y-8=0$ est celle d'un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.*

$$x^2+y^2-2x-8y-8=0 \Leftrightarrow x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2+y^2-2\times y\times 4+4^2-4^2-8=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-4)^2-16-8=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-4)^2=25.$$

(C) est un cercle de centre $K(1;4)$ et de rayon 5.

2) *Calculer les coordonnées des points d'intersection A et B de (C) avec la droite (D) d'équation $x+2y+1=0$.*

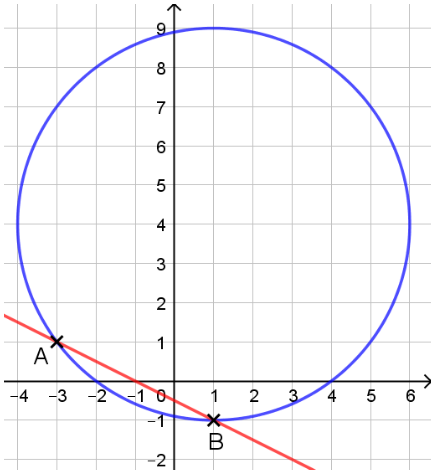
On doit résoudre :

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x-8y-8=0\\x+2y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-2y-1)^2+y^2-2(-2y-1)-8y-8=0\\x=-2y-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4y^2+4y+1+y^2+4y+2-8y-8=0\\x=-2y-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5y^2-5=0\\x=-2y-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2=1\\x=-2y-1\end{cases}$$

→soit $y=1$ et $x=-2y-1=-2\times 1-1=-3$: on obtient le point de coordonnées $(-3;1)$

→soit $y=-1$ et $x=-2y-1=-2\times(-1)-1=1$: on obtient le point de coordonnées $(1;-1)$.



Exercice 7 :

On considère un segment $[AB]$ mesurant 3 cm, le cercle C de centre A et de rayon 4 cm.

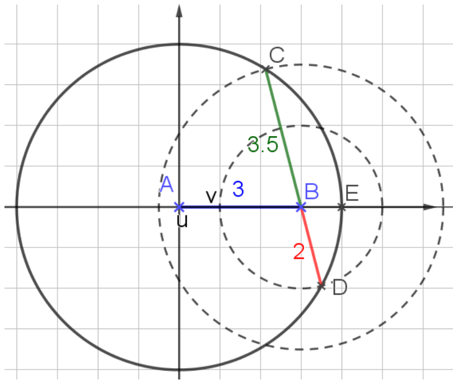
On appelle :

- *E le point d'intersection de $[AB]$ et du cercle C*
- *C le point du cercle C tel que $BC=3,5$ cm*
- *D le point du cercle C de l'autre côté (AB) tel que $BD=2$ cm.*

Démontrer que les points B, C et D sont alignés.

Dans un repère de centre orthonormé de centre A tel que les coordonnées de B soient $B(3;0)$, l'équation du cercle C de centre A et de rayon mesurant 4 cm est :

$$x^2+y^2=4^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-16=0.$$



L'équation du cercle de centre B et de rayon mesurant 3,5 cm est :

$$(x-3)^2+y^2=3{,}5^2 \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2=12{,}25$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x-3{,}25=0$$

L'équation du cercle de centre B et de rayon mesurant 2 cm est :

$$(x-3)^2+y^2=2^2 \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2=4$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+5=0$$

Le point C appartient aux deux premiers cercles donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} {x_C}^2+{y_C}^2-16=0 \\ {x_C}^2+{y_C}^2-6x_C-3{,}25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_C}^2+{y_C}^2=16 \\ 16-6x_C-3{,}25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_C}^2+{y_C}^2=16 \\ -6x_C=-12{,}75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} {x_C}^2+{y_C}^2=16 \\ x_C=\dfrac{-12{,}75}{-6}=\dfrac{17}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {y_C}^2=16-{x_C}^2=16-\left(\dfrac{17}{8}\right)^2 \\ x_C=\dfrac{17}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_C=\dfrac{7\sqrt{15}}{8} \\ x_C=\dfrac{17}{8} \end{cases}$$

Le point D appartient aux premier et troisième cercles donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} {x_D}^2+{y_D}^2-16=0 \\ {x_D}^2+{y_D}^2-6x_D+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_D}^2+{y_D}^2=16 \\ 16-6x_D+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_D}^2+{y_D}^2=16 \\ -6x_D=-21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} {x_D}^2+{y_D}^2=16 \\ x_D=\dfrac{-21}{-6}=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {y_D}^2=16-{x_D}^2=16-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2 \\ x_D=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_D=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2} \\ x_D=\dfrac{7}{2} \end{cases}.$$

Attention : par rapport à notre schéma, nous devons retenir : $y_D=-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Nous pouvons définir les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} \dfrac{17}{8}-3 \\ \dfrac{7\sqrt{15}}{8} \end{matrix}\right. \text{ soit } \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} -\dfrac{7}{8} \\ \dfrac{7\sqrt{15}}{8} \end{matrix}\right. \text{ et } \overrightarrow{BD}\left|\begin{matrix} \dfrac{7}{2}-3 \\ -\dfrac{\sqrt{15}}{2} \end{matrix}\right. \text{ soit } \overrightarrow{BD}\left|\begin{matrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{15}}{2} \end{matrix}\right..$$

Test de colinéarité de ces vecteurs :

$$\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)=\begin{vmatrix} -\dfrac{7}{8} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{7\sqrt{15}}{8} & -\dfrac{\sqrt{15}}{2} \end{vmatrix}=-\frac{7}{8}\times\frac{\sqrt{15}}{2}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{7\sqrt{15}}{8}\right)=-\frac{7\sqrt{15}}{16}+\frac{7\sqrt{15}}{16}=0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires en ayant un point commun : les points B, C et D sont alignés.