Exercices sur les équations de droites

Exercice 1 :

Soit d est la droite d'équation : $3x-y+5=0$.

1) Trouver un vecteur normal à d.
2) Trouver une équation de la droite Δ passant par $A(1;2)$ et perpendiculaire à d.

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, dites si les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

1) $d_1 : x-2y+4=0$ et $d_2 : 6x+3y-7=0$,
2) $d_1 : y=2x+5$ et $d_2 : x-2y+1=0$,
3) $d_1 : \left(1+\sqrt{2}\right)x-y+3=0$ et $d_2 : \left(1-\sqrt{2}\right)x+y=0$.

Exercice 3 :

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(3;4)$ et $B(5;-3)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) et de la médiatrice (d) du segment $[AB]$.

Exercice 4 :

On donne les équations cartésiennes des droites d_1 et d_2 suivantes :

$$d_1 : 7x-3y+2=0 \text{ et } d_2 : 5x-2y-8=0.$$

1) Démontrer que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
2) Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

Exercice 5 :

Trouver une équation de la droite Δ passant par le point $A(-1;4)$ et parallèle à la droite d d'équation :

$$3x-2y+1=0.$$

Exercice 6 :

Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(3;2)$ et $B(-5;-3)$.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) puis les coordonnées d'un vecteur normal à cette droite.
2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point $C\left(-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$.
3) Quelles sont les coordonnées du point C' symétrique du point C par rapport à la droite (AB) ?

Exercice 7 :

Les droites d_1 et d_2 ont respectivement comme équation cartésienne

$$d_1 : 3x-2y-8=0 \text{ et } d_2 : 5x+4y-6=0.$$

La droite Δ a pour équation : $2mx-(m+1)y-8=0$.

Comment choisir le paramètre m pour que ces trois droites soient concourantes ?

Exercice 8 :

Pour quelle valeur du paramètre m la droite d d'équation $mx-3y+2=0$ est-elle parallèle à la droite Δ d'équation :

$$3x-2y+4=0.$$

Exercice 9 :

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que $AB=5$ et $BC=6$.
On appelle :

- D le milieu du segment $[BC]$
- H le projeté orthogonal de D sur la droite (AC)
- K le milieu du segment $[DH]$.

En choisissant un repère orthonormé adapté, démontrer que les droites (AK) et (BH) sont perpendiculaires.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci - Montpellier

Exercice 1 :

Soit d est la droite d'équation : $3x-y+5=0$.

1) *Trouver un vecteur normal à d.*

Les coefficients $a=3$ et $b=-1$ donnent un vecteur normal : $\vec{u}\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix}$

2) *Trouver une équation de la droite* Δ *passant par* $\mathrm{A}(1;2)$ *et perpendiculaire à d.*

Dans le plan, le vecteur $\vec{u}$ normal à *d* est un vecteur directeur de Δ.

Soit $\mathrm{M}(x;y)$ un point de la droite Δ : les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{vmatrix}x-1\\y-2\end{vmatrix}$ sont colinéaires :

$$\det\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}3 & x-1\\-1 & y-2\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3(y-2)-(-1)(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 3y-6+x-1=0 \Leftrightarrow x+3y-7=0$$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, dites si les droites d_1 *et* d_2 *sont perpendiculaires.*

Si des droites sont orthogonales, leurs vecteurs normaux sont également orthogonaux.

Nous appellerons $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ des vecteurs normaux des droites d_1 et d_2.

1) $d_1 : x-2y+4=0$ et $d_2 : 6x+3y-7=0$

$\overrightarrow{n_1}\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{vmatrix}6\\3\end{vmatrix}$.

Produit scalaire :

$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=1\times6+(-2)\times3=6-6=0$ donc $d_1\perp d_2$

2) $d_1 : y=2x+5 \Leftrightarrow 2x-y+5=0$ et $d_2 : x-2y+1=0$,

$\overrightarrow{n_1}\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$.

Produit scalaire :

$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=2\times1+(-1)\times(-2)=2+2=4$ donc d_1 et d_2 ne sont pas orthogonales.

3) $d_1 : \left(1+\sqrt{2}\right)x-y+3=0$ et $d_2 : \left(1-\sqrt{2}\right)x+y=0$.

$\overrightarrow{n_1}\begin{vmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{vmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{vmatrix}$.

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=\left(1+\sqrt{2}\right)\times\left(1-\sqrt{2}\right)+(-1)\times1=1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2-1=1-2-1=-2$$

d_1 et d_2 ne sont pas orthogonales.

Exercice 3 :

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$, *on considère les points* $\mathrm{A}(3;4)$ *et* $\mathrm{B}(5;-3)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) *et de la médiatrice* (d) *du segment* $[\mathrm{AB}]$.

Soit $\mathrm{M}(x;y)$ un point de la droite (AB) : les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{vmatrix}x-3\\y-4\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{vmatrix}5-3\\-3-4\end{vmatrix}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{vmatrix}2\\-7\end{vmatrix}$ sont colinéaires

donc :

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-3 & 2\\y-4 & -7\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -7(x-3)-2(y-4)=0$$

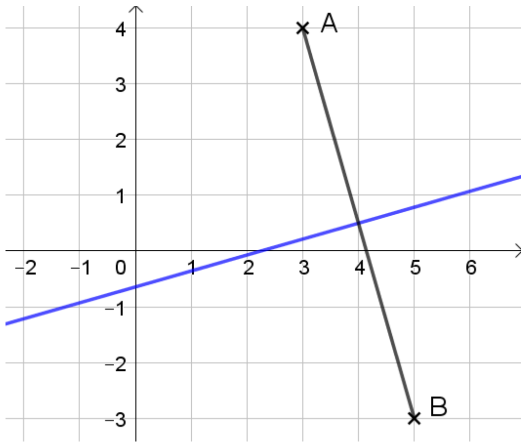
$\Leftrightarrow\ -7x+21-2y+8=0\ \Leftrightarrow\ -7x-2y+29=0\ \Leftrightarrow\ 7x+2y-29=0$: équation de (AB)

Soit I le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$:

$$\mathrm{I}\left(\frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2};\frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}\right) \text{ soit } \mathrm{I}\left(\frac{3+5}{2};\frac{4+(-3)}{2}\right) \text{ soit } \mathrm{I}\left(4;\frac{1}{2}\right).$$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left|\begin{matrix}2\\-7\end{matrix}\right.$ est un vecteur normal de sa médiatrice donc celle-ci s'écrit sous la forme :

$$2x-7y+c=0.$$



Or I est un point de cette médiatrice, donc :

$$2x_\mathrm{I}-7y_\mathrm{I}+c=0\ \Leftrightarrow\ 2\times4-7\times\frac{1}{2}+c=0$$

$$\Leftrightarrow\ 8-\frac{7}{2}+c=0\ \Leftrightarrow\ \frac{9}{2}+c=0\ \Leftrightarrow\ c=-\frac{9}{2}.$$

L'équation de la médiatrice est :

$$2x-7y-\frac{9}{2}=0.$$

Exercice 4 :

On donne les équations cartésiennes des droites d_1 et d_2 suivantes :

$$d_1\ :\ 7x-3y+2=0 \quad et \quad d_2\ :\ 5x-2y-8=0.$$

1) *Démontrer que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.*

Les vecteurs normaux de ces droites sont :

$$\vec{n_1}\left|\begin{matrix}7\\-3\end{matrix}\right. \text{ et } \vec{n_2}\left|\begin{matrix}5\\-2\end{matrix}\right..$$

Si des droites sont sécantes, leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

$$\det\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)=\begin{vmatrix}7 & 5\\-3 & -2\end{vmatrix}=7\times(-2)-5(-3)=-14+15=1.$$

Le déterminant est non nul, les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires et les droites d_1 et d_2 sont sécantes.

2) *Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?*

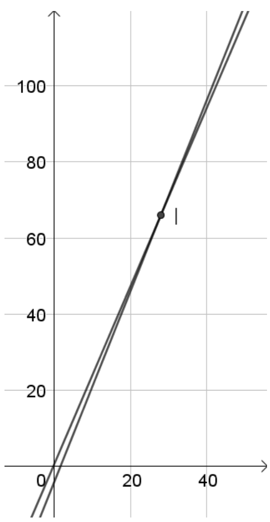
Soit $\mathrm{I}(x_\mathrm{I};y_\mathrm{I})$ le point d'intersection recherché appartenant aux deux droites :

$$\begin{cases}7x_\mathrm{I}-3y_\mathrm{I}+2=0\\5x_\mathrm{I}-2y_\mathrm{I}-8=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}-3y_\mathrm{I}=-7x_\mathrm{I}-2\\-2y_\mathrm{I}=-5x_\mathrm{I}+8\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}y_\mathrm{I}=\frac{7}{3}x_\mathrm{I}+\frac{2}{3}\\y_\mathrm{I}=\frac{5}{2}x_\mathrm{I}-4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{7}{3}x_\mathrm{I}+\frac{2}{3}=\frac{5}{2}x_\mathrm{I}-4\ \Leftrightarrow\ \frac{7}{3}x_\mathrm{I}-\frac{5}{2}x_\mathrm{I}=-4-\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{14}{6}x_\mathrm{I}-\frac{15}{6}x_\mathrm{I}=-\frac{12}{3}-\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{6}x_\mathrm{I}=-\frac{14}{3}\ \Leftrightarrow\ x_\mathrm{I}=-\frac{14}{3}\times(-6)=28$$



On utilise au choix une des deux lignes du système précédent :

$$y_\mathrm{I}=\frac{7}{3}x_\mathrm{I}+\frac{2}{3}=\frac{7}{3}\times28+\frac{2}{3}=\frac{196}{3}+\frac{2}{3}=\frac{198}{3}=66$$

ou $$y_\mathrm{I}=\frac{5}{2}x_\mathrm{I}-4=\frac{5}{2}\times28-4=\frac{140}{2}-4=70-4=66$$

Les coordonnées de $\mathrm{I}(28;66)$.

Exercice 5 :

Trouver une équation de la droite Δ passant par le point $\mathrm{A}(-1;4)$ et parallèle à la droite d d'équation :

$$3x-2y+1=0.$$

Deux droites parallèles ont le même vecteur normal $\vec{n}\begin{vmatrix}3\\-2\end{vmatrix}$ donc l'équation de la droite cherchée est de la forme :

$$3x-2y+c=0.$$

Or le point A appartient à cette droite donc :

$$3x_{\mathrm{A}}-2y_{\mathrm{A}}+c=0 \iff 3\times(-1)-2\times4+c=0 \iff -3-8+c=0 \iff c=11$$

L'équation de la parallèle recherchée est :

$$3x-2y+11=0.$$

Exercice 6 :

Dans le repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $\mathrm{A}(3;2)$ et $\mathrm{B}(-5;-3)$.

1) *Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) puis les coordonnées d'un vecteur normal à cette droite.*

Soit $\mathrm{M}(x;y)$ un point de cette droite : les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{vmatrix}x-3\\y-2\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{vmatrix}-8\\-5\end{vmatrix}$ sont colinéaires :

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=0 \iff \begin{vmatrix}x-3 & -8\\ y-2 & -5\end{vmatrix}=0 \iff -5(x-3)-(-8)(y-2)=0$$

$$\iff -5x+15+8y-16=0 \iff \iff -5x+8y-1=0$$

En utilisant les coefficients, on obtient un vecteur normal : $\vec{u}\begin{vmatrix}-5\\8\end{vmatrix}$.

2) *Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point $\mathrm{C}\left(-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$.*

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{vmatrix}-8\\-5\end{vmatrix}$ est un vecteur normal de la droite (d).

Soit $\mathrm{M}(x;y)$ un point de la droite (d) passant par C :

→les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CM}}\begin{vmatrix}x+\frac{7}{2}\\y-\frac{7}{2}\end{vmatrix}$ sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CM}}=0 \iff -8\left(x+\frac{7}{2}\right)+(-5)\left(y-\frac{7}{2}\right)=0 \iff -8x-28-5y+\frac{35}{2}=0$$

$$\iff -8x-5y-\frac{21}{2}=0 \iff 16x+10y+21=0$$

3) *Quelles sont les coordonnées du point C' symétrique du point C par rapport à la droite (AB) ?*

Il faut d'abord identifier le point $\mathrm{H}(x;y)$ projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

$$\text{Ainsi : } \begin{cases}\mathrm{H}\in(\mathrm{AB})\\ \mathrm{H}\in(d)\end{cases} \iff \begin{cases}-5x_{\mathrm{H}}+8y_{\mathrm{H}}-1=0 & \times 5\\ 16x_{\mathrm{H}}+10y_{\mathrm{H}}+21=0 & \times 4\end{cases} \iff \begin{cases}-25x_{\mathrm{H}}+40y_{\mathrm{H}}-5=0 & L_1\\ 64x_{\mathrm{H}}+40y_{\mathrm{H}}+84=0 & L_2\end{cases}$$

$$(L_2-L_1) : 64x_{\mathrm{H}}-(-25x_{\mathrm{H}})+84-(-5)=0 \iff 64x_{\mathrm{H}}+25x_{\mathrm{H}}+84+5=0$$

$$\Leftrightarrow\ 89x_{\mathrm{H}}+89=0\ \Leftrightarrow\ 89x_{\mathrm{H}}=-89\ \Leftrightarrow\ x_{\mathrm{H}}=\frac{-89}{89}=-1$$

Or $-5x_{\mathrm{H}}+8y_{\mathrm{H}}-1=0$ donc :

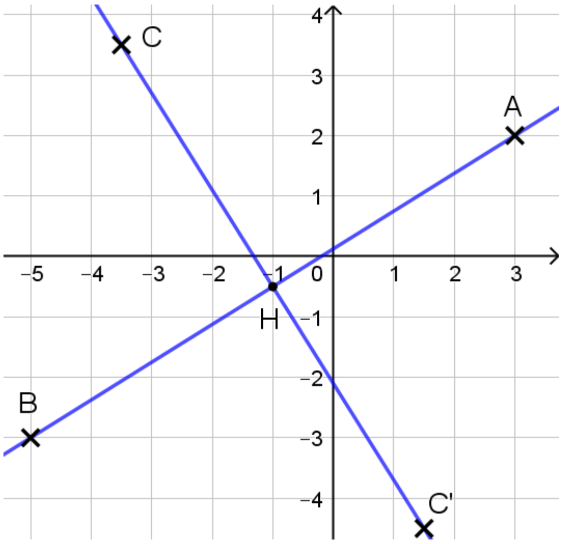
$$8y_{\mathrm{H}}=1+5x_{\mathrm{H}}\ \Leftrightarrow\ y_{\mathrm{H}}=\frac{1+5x_{\mathrm{H}}}{8}=\frac{1+5\times(-1)}{8}=\frac{1-5}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}.$$

Le point H a pour coordonnées $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

On cherche désormais le point $\mathrm{C}'(x;y)$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{HC}'}$ soit :

$$\begin{cases}-1-\left(-\frac{7}{2}\right)=x-(-1)\\-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=y-\left(-\frac{1}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1+\frac{7}{2}=x+1\\-\frac{8}{2}=y+\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1+\frac{7}{2}-1=x\\-\frac{8}{2}-\frac{1}{2}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3}{2}=x\\-\frac{9}{2}=y\end{cases}$$

Soit $\mathrm{C}'\left(\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$.



Exercice 7 :

Les droites d_1 et d_2 ont respectivement comme équation cartésienne

$$d_1 : 3x-2y-8=0 \quad et \quad d_2 : 5x+4y-6=0.$$

La droite Δ a pour équation : $2mx-(m+1)y-8=0$.

Comment choisir le paramètre m pour que ces trois droites soient concourantes ?

Soit $\mathrm{I}(x_{\mathrm{I}};y_{\mathrm{I}})$ le point d'intersection recherché appartenant aux deux droites d_1 et d_2 :

$$\begin{cases}3x_{\mathrm{I}}-2y_{\mathrm{I}}-8=0\\5x_{\mathrm{I}}+4y_{\mathrm{I}}-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2y_{\mathrm{I}}=-3x_{\mathrm{I}}+8\\4y_{\mathrm{I}}=-5x_{\mathrm{I}}+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_{\mathrm{I}}=\frac{3}{2}x_{\mathrm{I}}-4\\y_{\mathrm{I}}=-\frac{5}{4}x_{\mathrm{I}}+\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\ \frac{3}{2}x_{\mathrm{I}}-4=-\frac{5}{4}x_{\mathrm{I}}+\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3}{2}x_{\mathrm{I}}+\frac{5}{4}x_{\mathrm{I}}=\frac{3}{2}+4\ \Leftrightarrow\ \frac{6}{4}x_{\mathrm{I}}+\frac{5}{4}x_{\mathrm{I}}=\frac{3}{2}+\frac{8}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{11}{4}x_{\mathrm{I}}=\frac{11}{2}\ \Leftrightarrow\ x_{\mathrm{I}}=\frac{11}{2}\times\frac{4}{11}=2$$

L'ordonnée s'obtient avec l'une des deux équations du dernier système :

$$y_{\mathrm{I}}=\frac{3}{2}x_{\mathrm{I}}-4=\frac{3}{2}\times2-4=-1.$$

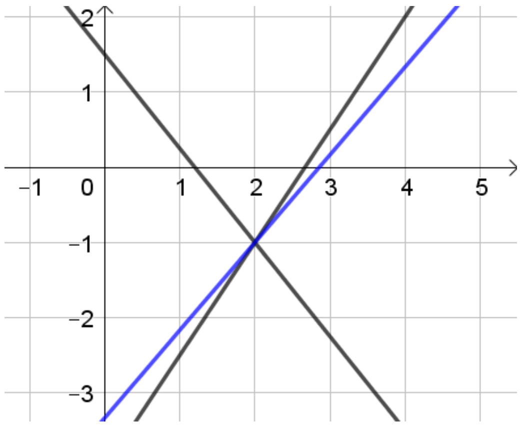
Les coordonnées de I sont $\mathrm{I}(2;-1)$.

Si $\mathrm{I} \in \Delta$, alors :

$$2mx_{\mathrm{I}} - (m+1)y_{\mathrm{I}} - 8 = 0 \Leftrightarrow 2m \times 2 - (m+1) \times (-1) - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4m + m + 1 - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow 5m = 7 \Leftrightarrow m = \frac{7}{5}.$$

Une équation de Δ est :

$$2 \times \frac{7}{5} \times x - \left(\frac{7}{5} + 1\right) y - 8 = 0 \Leftrightarrow \frac{14}{5}x - \frac{12}{5}y - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow 14x - 12y - 40 = 0$$
$$\Leftrightarrow 7x - 6y - 20 = 0$$



Exercice 8 :

Pour quelle valeur du paramètre m la droite d d'équation $mx - 3y + 2 = 0$ *est-elle parallèle à la droite* Δ *d'équation :*

$$3x - 2y + 4 = 0.$$

Deux droites parallèles possèdent des vecteurs normaux colinéaires $\vec{n_1}\begin{vmatrix} m \\ -3 \end{vmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix}$. Donc :

$$\det\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2m - 3 \times (-3) = 0 \Leftrightarrow -2m + 9 = 0 \Leftrightarrow -2m = -9$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{9}{2}.$$

L'équation de la droite recherchée est :

$$\frac{9}{2}x - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow 9x - 6y + 4 = 0.$$

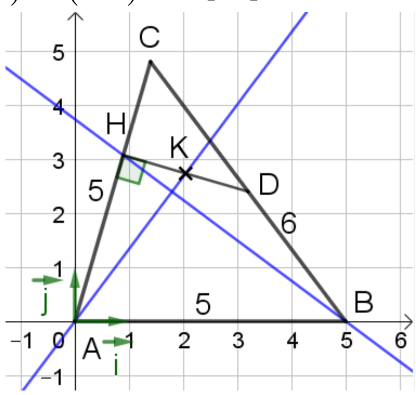
Exercice 9 :

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que $\mathrm{AB} = 5$ *et* $\mathrm{BC} = 6$.
On appelle :

- *D le milieu du segment* $[\mathrm{BC}]$
- *H le projeté orthogonal de D sur la droite* (AC)
- *K le milieu du segment* $[\mathrm{DH}]$.

En choisissant un repère orthonormé adapté, démontrer que les droites (AK) *et* (BH) *sont perpendiculaires.*

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{A}; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $\mathrm{A}(0;0)$, $\mathrm{B}(5;0)$ et $\mathrm{C}(x_{\mathrm{C}}; y_{\mathrm{C}})$.



Le triangle ABC est isocèle en A avec $\mathrm{AC} = 5$ et $\mathrm{BC} = 6$ donc :

$$\mathrm{AC}^2 = x_{\mathrm{C}}^2 + y_{\mathrm{C}}^2 = 25$$
$$\mathrm{BC}^2 = (x_{\mathrm{C}} - 5)^2 + y_{\mathrm{C}}^2 = 36$$
$$\Leftrightarrow x_{\mathrm{C}}^2 - 10x_{\mathrm{C}} + 25 + y_{\mathrm{C}}^2 = 36$$

→on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} x_{\mathrm{C}}^2 + y_{\mathrm{C}}^2 = 25 \\ x_{\mathrm{C}}^2 - 10x_{\mathrm{C}} + 25 + y_{\mathrm{C}}^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x_{\mathrm{C}}^2 + y_{\mathrm{C}}^2\right) - 10x_{\mathrm{C}} + 25 = 36$$
$$\Leftrightarrow 25 - 10x_{\mathrm{C}} + 25 = 36$$

$$\Leftrightarrow \quad -10x_C = 36 - 50$$

$$\Leftrightarrow \quad x_C = \frac{-14}{-10} = 1,4$$

Ensuite : $x_C{}^2 + y_C{}^2 = 25 \Leftrightarrow y_C{}^2 = 25 - x_C{}^2 = 25 - 1,4^2 = 23,04$

On retient la solution positive :

$$y_C = \sqrt{23,04} = 4,8$$

Les coordonnées de C sont $C(1,4;4,8)$.

D est le milieu du segment $[BC]$ donc :

$$D\left(\frac{x_B + x_C}{2};\frac{y_B + y_C}{2}\right) \text{ soit } D\left(\frac{5+1,4}{2};\frac{4,8}{2}\right) \text{ soit } D(3,2;2,4).$$

H le projeté orthogonal de D sur la droite linéaire (AC) donc ;

$$\begin{cases} H \in (AC) \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{HD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (AC) \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HD} = 0 \end{cases}.$$

Or l'équation linéaire de la droite (AC) est de la forme : $y = a \times x$

→le point C appartient à cette droite donc :

$$y_C = a \times x_C \Leftrightarrow a = \frac{y_C}{x_C} = \frac{4,8}{1,4} = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$$

L'équation de la droite (AC) est : $y = \frac{24}{7}x$.

On définit les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} 1,4 \\ 4,8 \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HD}\begin{vmatrix} x_D - x_H \\ y_D - y_H \end{vmatrix} \text{ soit : } \overrightarrow{HD}\begin{vmatrix} 3,2 - x_H \\ 2,4 - y_H \end{vmatrix}.$$

Le système devient :

$$\begin{cases} y_H = \frac{24}{7}x_H \\ 1,4(3,2 - x_H) + 4,8(2,4 - y_H) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_H = \frac{24}{7}x_H \\ 4,48 - 1,4x_H + 11,52 - 4,8y_H = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_H = \frac{24}{7}x_H \\ 16 - 1,4x_H - 4,8 \times \frac{24}{7}x_H = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_H = \frac{24}{7}x_H \\ -1,4x_H - \frac{115,2}{7}x_H = -16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_H = \frac{24}{7}x_H \\ -\frac{9,8}{7}x_H - \frac{115,2}{7}x_H = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_H = \frac{24}{7}x_H \\ -\frac{125}{7}x_H = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_H = \frac{24}{7}x_H \\ x_H = -16 \times \left(-\frac{7}{125}\right) = \frac{112}{125} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_H = \frac{24}{7} \times \frac{112}{125} = \frac{384}{125} \\ x_H = \frac{112}{125} \end{cases}$$ →les coordonnées de H sont $H\left(\frac{112}{125};\frac{384}{125}\right)$.

Soit K le milieu de $[DH]$, ses coordonnées sont :

$$K\left(\frac{x_D + x_H}{2};\frac{y_D + y_H}{2}\right) \text{ soit } K\left(\frac{3,2 + \frac{112}{125}}{2};\frac{2,4 + \frac{384}{125}}{2}\right) \text{ soit } K\left(\frac{256}{125};\frac{342}{125}\right).$$

Nous pouvons enfin étudier la position relative des droites (AK) et (BH) en calculant le produit scalaire des vecteurs :

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}\left|\begin{array}{l}\dfrac{256}{125}\\ \dfrac{342}{125}\end{array}\right. \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{BH}}\left|\begin{array}{l}x_{\mathrm{H}}-x_{\mathrm{B}}\\ y_{\mathrm{H}}-y_{\mathrm{B}}\end{array}\right. \text{ soit } \overrightarrow{\mathrm{BH}}\left|\begin{array}{l}\dfrac{112}{125}-5\\ \dfrac{385}{125}\end{array}\right. \text{ soit } \overrightarrow{\mathrm{BH}}\left|\begin{array}{l}-\dfrac{513}{125}\\ \dfrac{385}{125}\end{array}\right. .$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}.\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\frac{256}{125}\times\left(-\frac{513}{125}\right)+\frac{342}{125}\times\frac{384}{125}=0 .$$

Les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (AK) et (BH) sont perpendiculaires.