Exercice d'application sur les fonctions coûts

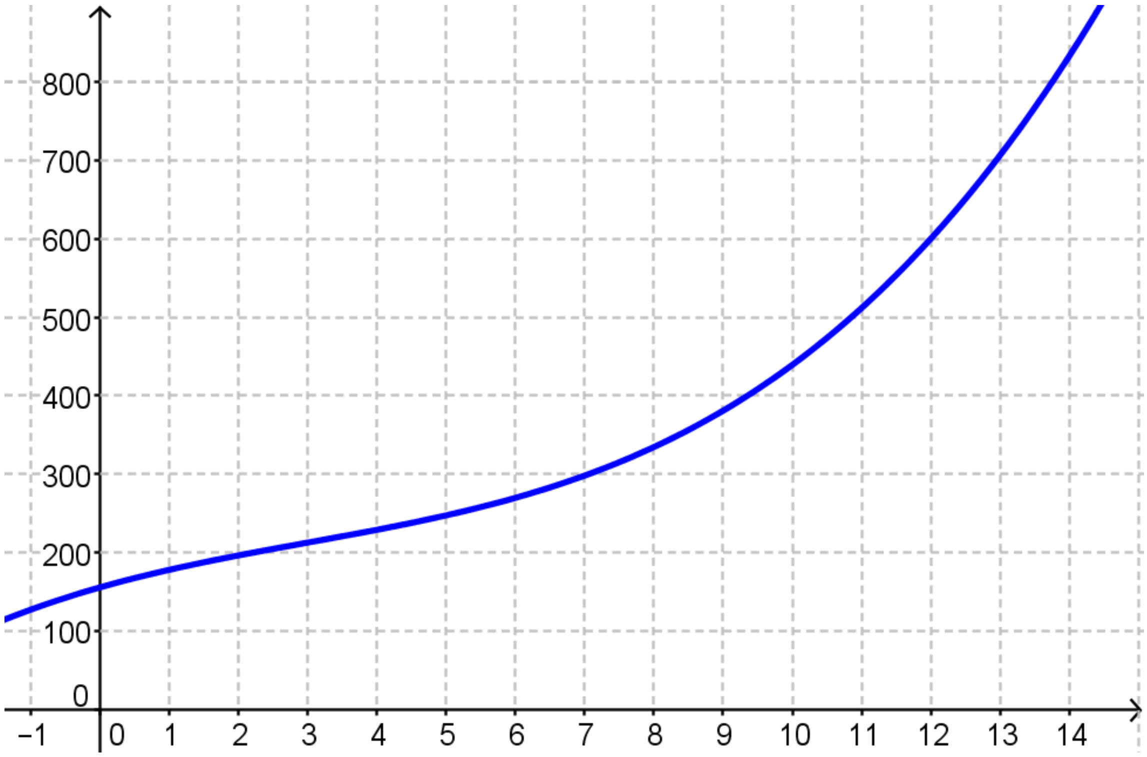
Exercice 7.1 :

Soit C la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;14]$ par :

$$C(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+25x+156$$

La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.

La courbe C_T représentative de la fonction C est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal.



On suppose que chaque article produit est vendu au prix de 50 €.

1. On note $R(x)$ la recette générée par la production et la vente de x milliers d'articles.
   a) Dans le repère précédent, tracer la courbe représentative de la fonction recette.
   b) Déterminer graphiquement les valeurs arrondies au millier près des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

2. Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;14]$ par $B(x)=R(x)-C(x)$.
   a) Exprimer $B(x)$.
   b) Calculer $B'(x)$.
   c) Étudier les variations de la fonction B.
   d) En déduire la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

      Quel est le montant en euro de ce bénéfice maximal ?

3. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $]0;14]$ par

$$C_M(x)=\frac{C(x)}{x}$$

   a) Quelle est l'expression de $C_M(x)$?
   b) Calculer sa dérivée $C_M'(x)$.
   c) Etudier les variations de $C_M'(x)$ et dresser le tableau de variations.
   d) Pour quelle production exacte le coût moyen est-il minimal ?

Exercice 7.2 :

Un artisan qui fabrique des petits meubles fait une étude sur une production comprise entre 0 et 60 objets. Le coût de production, en euros, de *x* meubles fabriqués est donné par :

$$C(x) = x^2 + 50x + 900 \quad \text{pour} \quad x \in [0;60].$$

Partie A :

1. Calculer $C(0)$. En déduire les frais fixes de l'artisan.
2. Quel est le coût de production de 30 meubles ?
3. Quel est le coût de production par meuble, lorsque l'artisan fabrique 30 meubles ?
4. Soit $f(x)$ le coût unitaire moyen pour *x* meubles fabriqués. Exprimer $f(x)$ en fonction de *x*, pour $x \neq 0$.

Partie B :

On étudie la fonction *f* définie sur l'intervalle $[7;60]$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{900}{x}$$

1. a. Déterminer la dérivée de *f*.
   b. Justifier que :
   $$f'(x) = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$$
2. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de *f* sur l'intervalle $[7;60]$.
3. Compléter le tableau suivant :

x	7	10	15	20	25	30	40	45	50	60
$f(x)$										

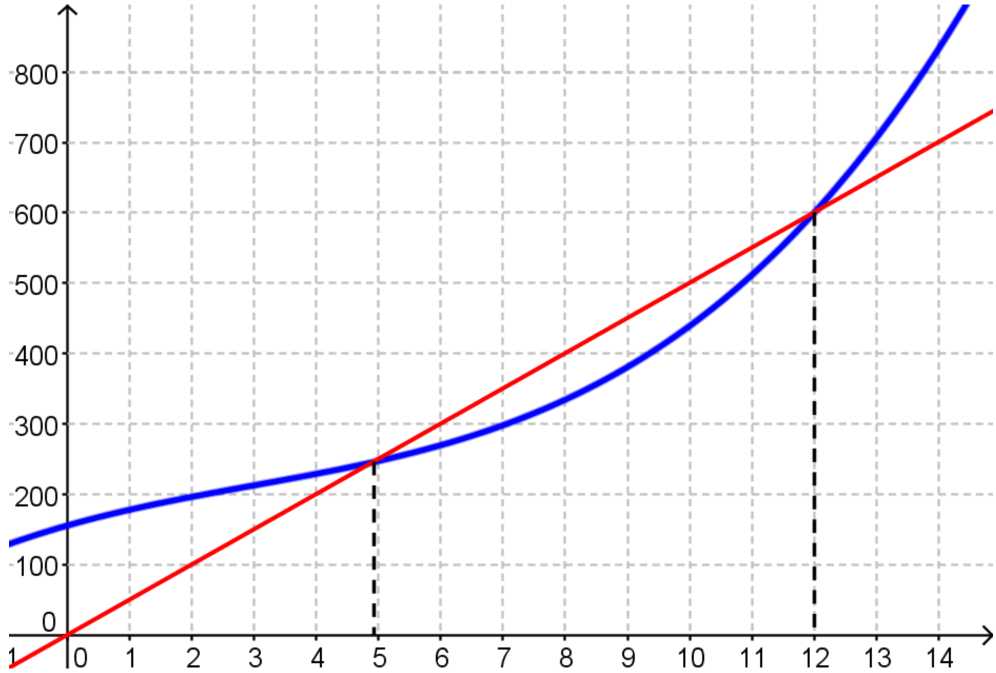
4. Tracer la courbe représentative de la fonction *f* et dresser le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $[7;60]$.
5. On suppose la production comprise entre 7 et 60 objets. Quel nombre de meubles doit fabriquer un artisan pour que le coût unitaire moyen soit minimal ? Indiquer ce coût.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 7.1 :

Soit C la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;14]$ par : $C(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+25x+156$

La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.
La courbe C_T représentative de la fonction C est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal.



On suppose que chaque article produit est vendu au prix de 50 €.

1. On note $R(x)$ la recette générée par la production et la vente de x milliers d'articles.
   a) *Dans le repère précédent, tracer la courbe représentative de la fonction recette.*
   $R(x)=50x$
   b) *Déterminer graphiquement les valeurs arrondies au millier près des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.*
   Le bénéfice est positif pour $5\le x\le 12$, c'est-à-dire pour une production comprise entre 5000 et 12000 articles.
2. Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;14]$ par $B(x)=R(x)-C(x)$.

   a) $B(x)=R(x)-C(x)=50x-\left(\dfrac{x^3}{3}-3x^2+25x+156\right)=50x-\dfrac{x^3}{3}+3x^2-25x-156$

   $B(x)=-\dfrac{x^3}{3}+3x^2+25x-156=-\dfrac{1}{3}x^3+3x^2+25x-156$.

   b) *Calculer* $B'(x)$:
   La fonction B est dérivable en tant que composée de fonctions polynomiales
   $$B'(x)=-\frac{1}{3}\times 3x^2+3\times 2x+25=-x^2+6x+25$$

   c) Étudier les variations de la fonction B.
   $\Delta=6^2-4\times(-1)\times 25=36+100=136$
   $$x_1=\frac{-6-\sqrt{136}}{2\times(-1)}=\frac{-6-\sqrt{4\times 34}}{-2}=\frac{-6-2\sqrt{34}}{-2}=3+\sqrt{34}$$
   $$x_2=\frac{-6+\sqrt{136}}{2\times(-1)}=3-\sqrt{34}$$

Le coefficient a est négatif $(a=-1)$ donc la parabole est « orientée vers le bas ».

Donc $B'(x)>0$ si $x\in\left]3-\sqrt{34};3+\sqrt{34}\right[$

Or l'étude porte sur l'intervalle $\left]0;14\right]$ et $3-\sqrt{34}<0$

Ainsi : $B'(x)>0$ si $x\in\left]0;3+\sqrt{34}\right[$

$B'(x)<0$ si $x\in\left]3+\sqrt{34};14\right[$

x	0		$3+\sqrt{34}$		14
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

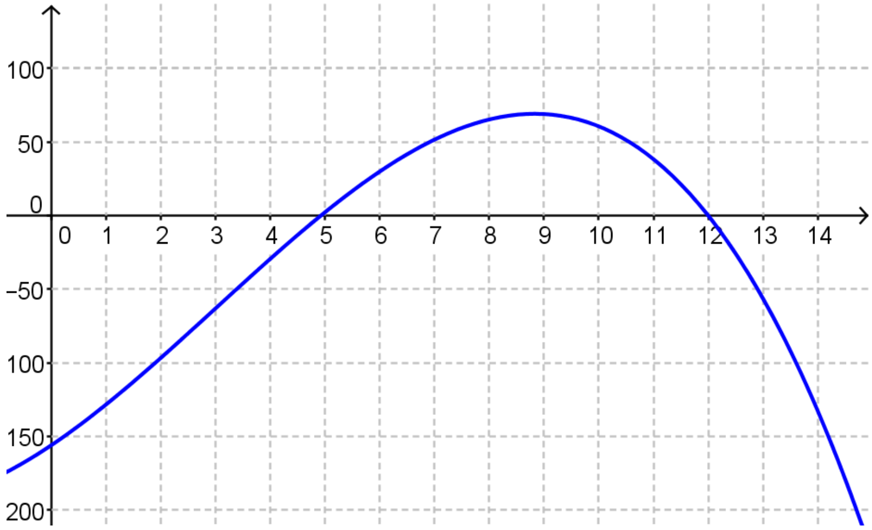
d) *En déduire la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.*
Quel est le montant en euro de ce bénéfice maximal ?

Le bénéfice est maximal pour $x_0=3+\sqrt{34}\simeq 8,831$, soit une production de 8831 articles.

Ce bénéfice maximal vaut $B(x_0)$:

$$B\left(3+\sqrt{34}\right)=-\frac{1}{3}\left(3+\sqrt{34}\right)^3+3\left(3+\sqrt{34}\right)^2+25\left(3+\sqrt{34}\right)-156\simeq 69,168$$

Soit un bénéfice maximal de 69 168 €.



3. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $\left]0;14\right]$ par

$$C_M(x)=\frac{C(x)}{x}$$

a) *Quelle est l'expression de $C_M(x)$?*

$$C_M(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{\frac{x^3}{3}-3x^2+25x+156}{x}=\frac{\frac{x^3}{3}}{x}-\frac{3x^2}{x}+\frac{25x}{x}+\frac{156}{x}=\frac{x^2}{3}-3x+25+\frac{156}{x}$$

b) *Calculer sa dérivée $C_M'(x)$.*

$$C_M'(x)=\frac{1}{3}\times 2x-3+156\times\frac{-1}{x^2}=\frac{2}{3}x-3-\frac{156}{x^2}=\frac{2x^3}{3x^2}-3\times\frac{3x^2}{3x^2}-\frac{156\times 3}{x^2\times 3}=\frac{2x^3-9x^2-468}{3x^2}$$

Exercice 7.2 :

Un artisan qui fabrique des petits meubles fait une étude sur une production comprise entre 0 et 60 objets. Le coût de production, en euros, de *x* meubles fabriqués est donné par :

$$C(x) = x^2 + 50x + 900 \quad \text{pour} \quad x \in [0;60].$$

Partie A :

5. Calculer $C(0)$. En déduire les frais fixes de l'artisan.
6. Quel est le coût de production de 30 meubles ?
7. Quel est le coût de production par meuble, lorsque l'artisan fabrique 30 meubles ?
8. Soit $f(x)$ le coût unitaire moyen pour *x* meubles fabriqués. Exprimer $f(x)$ en fonction de *x*, pour $x \neq 0$.

Partie B :

On étudie la fonction *f* définie sur l'intervalle $[7;60]$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{900}{x}$$

6. a. Déterminer la dérivée de *f*.

   b. Justifier que :

   $$f'(x) = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$$
7. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de *f* sur l'intervalle $[7;60]$.
8. Compléter le tableau suivant :

x	7	10	15	20	25	30	40	45	50	60
$f(x)$										

9. Tracer la courbe représentative de la fonction *f* et dresser le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $[7;60]$.
10. On suppose la production comprise entre 7 et 60 objets. Quel nombre de meubles doit fabriquer un artisan pour que le coût unitaire moyen soit minimal ? Indiquer ce coût.