Exercices sur la notion de limite pour les suites numériques

Exercice 01

Pour chacune des suites, en calculant différents termes, conjecturer la valeur limite de u_n quand n devient infiniment grand (c'est-à-dire quand n tend vers $+\infty$).

1) $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$
2) $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
3) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
4) $u_n = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$
5) $u_n = \frac{2n+1}{n-5}$ pour $n \geq 6$
6) $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 02

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5.
2) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner un tableau des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1 à u_{10}. Conjecturer la valeur limite l de la suite (u_n).
3) En utilisant un algorithme, déterminer le premier entier pour lequel on a $u_n < 2,0000001$.

Exercice 03

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 \end{cases}$

1) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner des valeurs approchées de u_1 à u_{10} puis des valeurs approchées de u_{20} et de u_{50}.
   Emettre une conjecture sur la valeur limite de la suite (u_n).
2) Déterminer un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $4,999 < u_n < 5,001$.

Exercice 04

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n}$

1) Déterminer un entier naturel N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]-0,1;0,1[$.

Exercice 05

On considère la suite définie par $u_n = \frac{2n+1}{n}$ pour $n \geq 1$.

1) Calculer u_1, u_2, $\dots u_{10}$ et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
2) Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un ordinateur.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
3) En utilisant un algorithme, déterminer le premier entier pour lequel on a $u_n < 2,0001$.

Exercice 06

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n^2+100}{7n}$ pour $n \geq 1$.

1) Donner, en utilisant une calculatrice ou un tableur, des valeurs approchées à 10^{-2} près de u_1, u_2, … u_7.
2) Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un tableur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
3) On considère A un nombre réel. En utilisant un algorithme, déterminer, dans les différents cas ci-dessous, le premier entier n pour lequel $u_n > A$:

A	10	20	100	5489	12 548	100 000
n	1	46				

4) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 07

Expliquer pourquoi la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Exercice 08

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n-8}{n+5}$ pour $n \geq 0$.

1) Identifier une possible limite L pour cette suite (u_n).
2) Justifier que L est la limite de cette suite (u_n).
3) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à $]L-0,0001; L+0,0001[$?

Exercice 09

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5-2n^2$ pour $n \geq 0$.

1) Expliquer pourquoi cette suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) vérifient $u_n < -10000$?

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+2n+5}{n+3}$ pour $n \geq 0$.

1) Cette suite (u_n) possède-t-elle une limite
2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) vérifient $u_n > 5000$?

Exercice 11

Quelles sont les limites des suites suivantes lorsqu'elles existent ?
Pour tout entier n :

1) $u_n = n^2-4n+7$
2) $u_n = \dfrac{3n^2+8n+1}{2n^2+9}$
3) $u_n = \sqrt{n^2+2}-n$
4) $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$
5) $u_n = \dfrac{5-4\sin\left(4n^2\right)}{2\sqrt{n}}$

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{4n+120}{35+2n}$ pour $n \geq 0$.

1) Identifier une possible limite L pour cette suite (u_n).
2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à l'intervalle $]L-0,0001; L+0,0001[$?

Exercice 13 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n^2+3}{5n-2}$ pour $n \geq 3$.

1) Quelle semble être la limite de cette suite (u_n) ?
2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à $]25000; +\infty[$?

Exercice 14 : *Suite arithmético-géométrique*

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80 % ainsi que l'apparition de 4000 nouveaux abonnés. La politique du club fait que seuls les abonnés peuvent assister aux rencontres de l'équipe première. On note a_n le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2010+n$ et on précise que $a_0 = 7000$ pour l'année 2010.

1) Calculer le nombre d'abonnés en 2011 puis en 2012.
2) Expliquer pourquoi $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = 0,8a_n + 4000$.
3) On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = 20\,000 - a_n$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et u_0.
4) Donner la formule explicite de (u_n) puis de (a_n).
5) Le club envisage la construction d'un nouveau stade. Quelle capacité faut-il envisager ?
6) Actuellement, la capacité du stade est de 18 500 places. A l'aide de l'algorithme ci-dessous, déterminer en quelle année le stade ne pourra plus accueillir l'ensemble des abonnés.

Variables :	*N* est un nombre entier naturel non nul.
	A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à *A* la valeur …
	Affecter à *N* la valeur…
Traitement :	Tant que ………
	Affecter à ……………………….
	Affecter à …………………….
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher …..

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 01

Pour chacune des suites, en calculant différents termes, conjecturer la valeur limite de u_n quand n devient infiniment grand (c'est-à-dire quand n tend vers $+\infty$).

1) $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ → $u_{100\,000} = \frac{1}{100\ 000} = 0{,}000\ 01$: la limite semble être 0.

2) $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ → $u_{1000} = 2 \times 1000^2 - 1 = 1\,999999$: la limite semble être $+\infty$.

3) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ → $u_{1000} = \frac{1000}{1000^2+1} \simeq 0{,}001$: la limite semble être 0.

4) $u_n = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ → $u_{25} = 2^{25} = 33554432$: la limite semble être $+\infty$.

5) $u_n = \frac{2n+1}{n-5}$ pour $n \geq 6$ → $u_{10000} = \frac{2 \times 10\,000 + 1}{10\,000 - 5} \simeq 2{,}0011$: la limite semble être 2.

6) $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ → $u_{1000} = (-1)^{1000} = 1$ et $u_{1001} = (-1)^{1001} = -1$: pas de limite.

Exercice 02

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) $u_1 = 3$; $u_2 = 2{,}5$; $u_3 = 2{,}25$; $u_4 = 2{,}125$; $u_5 = 2{,}0625$.

2) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner un tableau des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1 à u_{10}. Conjecturer la valeur limite l de la suite (u_n).

$u_6 = 2{,}03125$; $u_7 = 2{,}015625$; $u_8 = 2{,}0078125$; $u_9 = 2{,}00390625$; $u_{10} = 2{,}001953125$.

La limite de cette suite semble être la valeur 2.

3) En utilisant un algorithme, déterminer le premier entier pour lequel on a $u_n < 2{,}0000001$.

```
u=4
n=0
while u>2.0000001:
    u=u/2+1
    n+=1
print(n)
```

→ le rang n cherché est 17

Exercice 03

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 \end{cases}$

1) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner des valeurs approchées de u_1 à u_{10} puis des valeurs approchées de u_{20} et de u_{50}.

Emettre une conjecture sur la valeur limite de la suite (u_n).

$u_1 = 8$; $u_2 = 6{,}8$; $u_3 = 6{,}08$; $u_4 = 5{,}648$; $u_5 = 5{,}3888$.

$u_6 = 5{,}23328$; $u_7 = 5{,}139968$; $u_8 = 5{,}0839808$; $u_9 = 5{,}05038848$; $u_{10} = 5{,}030233088$.

$u_{20} \simeq 5{,}000182$; $u_{50} \simeq 5{,}00000000004$.

La limite de la suite semble être 5.

2) Déterminer un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $4,999 < u_n < 5,001$.

```
u=10
n=0
while u<=4.999 or u>=5.001:
    u=3*u/5+2
    n+=1
print(u,n)
```

→ le rang n cherché est 17

→ $u_{17} \simeq 5,000846$

Exercice 04

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}$

1) Déterminer un entier naturel N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]-0,1;0,1[$.

La fonction inverse est positive et décroissante sur $]0;+\infty[$ donc la suite (u_n) est également positive et décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On trouve aisément : $u_{10} = \dfrac{1}{10} = 0,1$ et $u_{11} = \dfrac{1}{11} \simeq 0,091$.

La suite est décroissante et positive, donc à partir du 11ème rang : $0 < u_n < 0,1$.

Ainsi pour $n \geq 11$: $u_n \in]-0,1;0,1[$

Exercice 05

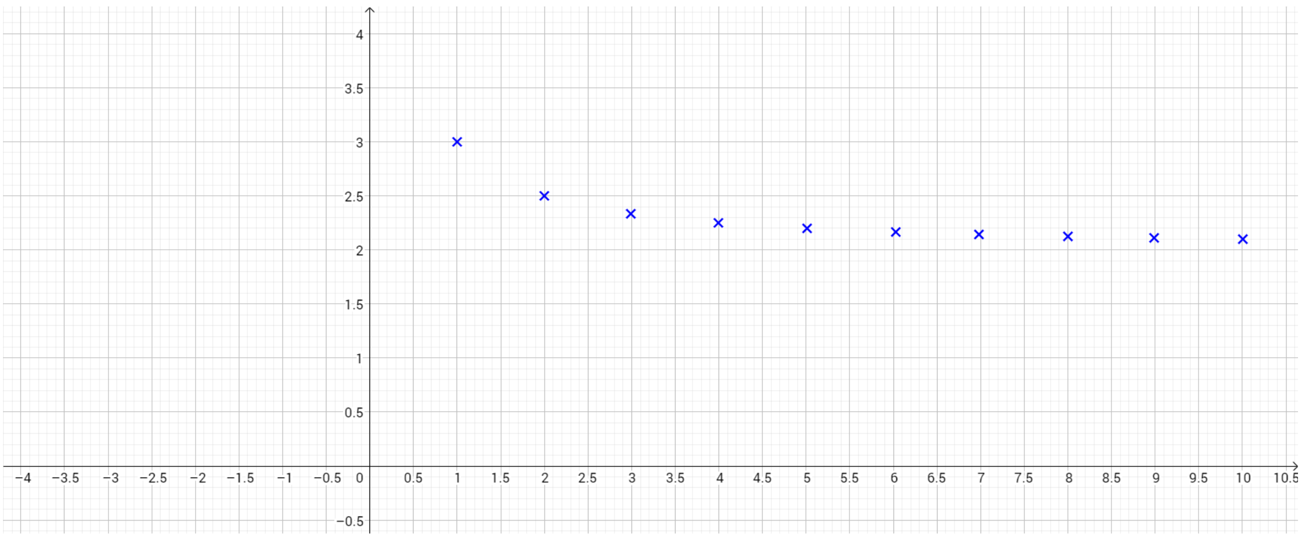
On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$ pour $n \geq 1$.

1) Calculer u_1, u_2, … u_{10} et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

$u_1 = 3$; $u_2 = 2,5$; $u_3 \simeq 2,33$; $u_4 = 2,25$; $u_5 = 2,2$;
$u_6 \simeq 2,17$; $u_7 \simeq 2,14$; $u_8 = 2,125$; $u_9 \simeq 2,11$; $u_{10} = 2,1$.

2) Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un ordinateur.

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?



La suite (u_n) semble admettre la valeur 2 pour limite.

3) En utilisant un algorithme, déterminer le premier entier pour lequel on a $u_n < 2,0001$.

```
u=3
n=1
while u>=2.0001:
    n+=1
    u=(2*n+1)/n
print(u,n)
```

→ le rang n cherché est 10 001 avec $u_{10001} \simeq 2{,}000099990001$

Exercice 06

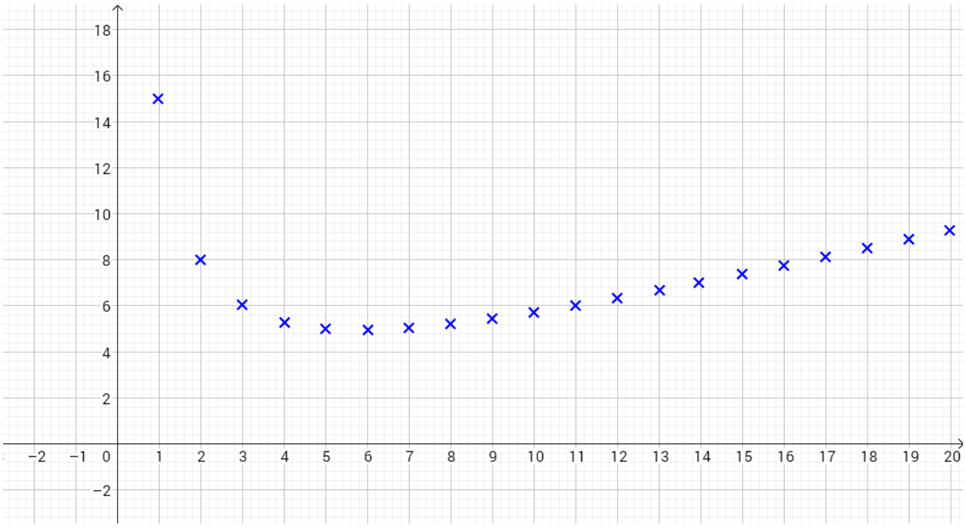
On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n^2+100}{7n}$ pour $n \geq 1$.

1) Donner, en utilisant une calculatrice ou un tableur, des valeurs approchées à 10^{-2} près de u_1, u_2, … u_7.

$u_1 = \dfrac{103}{7} \simeq 14{,}71$; $u_2 = 8$; $u_3 \simeq 6{,}05$; $u_4 \simeq 5{,}29$; $u_5 = 5$; $u_6 \simeq 4{,}95$; $u_7 \simeq 5{,}04$

2) Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un tableur.

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?



La suite (u_n) semble admettre $+\infty$ comme limite.

3) On considère A un nombre réel. En utilisant un algorithme, déterminer, dans les différents cas ci-dessous, le premier entier n pour lequel $u_n > A$:

```
u=103/7
n=1
while u<=20:
    n+=1
    u=(3*n**2+100)/(7*n)
print(u,n)
```

→ Le rang n cherché est 46 : $u_{46} \simeq 20{,}025$

A	10	20	100	5489	12 548	100 000
n	1	46	234	12 808	29 279	233 334

4) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Il semble que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 07

Justifier que la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

La suite $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 suivant que n est pair ou impair.

Donc cette suite ne peut avoir $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite.

Exercice 08

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n-8}{n+5}$ pour $n \geq 0$.

1) Identifier une possible L pour cette suite (u_n).

$$u_{1000} = \frac{3\times1000-8}{1000+5} \simeq 2,977 \quad \text{et} \quad u_{10000} = \frac{3\times10\,000-8}{10\,000+5} \simeq 2,998$$

La limite L semble être 3.

2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à

$]3-0,0001;3+0,0001[=]2,9999;3,0001[$ avec $u_0 = -\dfrac{8}{5}$?

```
u= –8/5
n=0
while u<=2.9999 or u>=3.0001:
   n+=1
   u=(3*n–8)/(n+5)
print(u,n)
```

→ Le rang *n* cherché est 229 996 : $u_{229995} = 2,9999$ et $u_{229996} \simeq 2,9999000004$

Exercice 09

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5-2n^2$ pour $n \geq 0$.

1) Expliquer pourquoi cette suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

La fonction carré tend vers $+\infty$, donc $-2n^2$ tend vers $-\infty$ et $5-2n^2$ aussi.

2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) vérifient $u_n < -10\,000$?

```
u= 5
n=0
while u>= –10000:
   n+=1
   u=5–2*n**2
print(u,n)
```

→ Le rang *n* cherché est 71 : $u_{70} -9795$ et $u_{71} -10\,077$

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+2n+5}{n+3}$ pour $n \geq 0$.

1) Cette suite (u_n) possède-t-elle une limite ?

Il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) vérifient $u_n > 5000$?

```
u= 5/3
n=0
while u<=5000:
   n+=1
   u=(n**2+2*n+5)/(n+3)
print(u,n)
```

→ Le rang n cherché est 5001 : $u_{5000} \simeq 4999,002$ et $u_{5001} \simeq 5000,002$

Exercice 11

Quelles sont les limites des suites suivantes lorsqu'elles existent.
Pour tout entier n :

1) $u_n = n^2 - 4n + 7$ → $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) $u_n = \dfrac{3n^2+8n+1}{2n^2+9}$ → $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$

3) $u_n = \sqrt{n^2+2} - n$ → $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

4) $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ → $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

5) $u_n = \dfrac{5-4\sin\left(4n^2\right)}{2\sqrt{n}}$ → $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{4n+120}{35+2n}$ pour $n \geq 0$.

1) Identifier une possible limite L pour cette suite (u_n).

$u_{1000} = \dfrac{4n+120}{35+2n} \simeq 2,025$ et $u_{10000} = \dfrac{4n+120}{35+2n} \simeq 2,002$: la limite semble être L = 2.

2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à l'intervalle $]L-0,0001 ; L+0,0001[=]1,9999 ; 2,0001[$?

On calcule $u_0 = \dfrac{120}{35} = \dfrac{24}{7}$

```
u= 24/7
n=0
while u<=1.9999 or u >=2.0001:
   n+=1
   u=(2*n+120)/(35+2*n)
print(u,n)
```

→ Le rang n cherché est 249 983 : $u_{249982} \simeq 2,0001000002$ et $u_{249983} \simeq 2,0000999998$.

Exercice 13 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n^2+3}{5n-2}$ pour $n \geq 3$.

1) Quelle semble être la limite de cette suite (u_n) ?

Il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) A partir de quel rang n_0 tous les termes de cette suite (u_n) appartiennent-ils à $]25000;+\infty[$?

On calcule $u_3 = \dfrac{2\times 3^2+3}{5\times 3-2} = \dfrac{21}{13}$

```
u= 21/13
n=3
while u<=25000:
   n+=1
   u=(2*n**2+3)/(5*n–2)
print(u,n)
```

→ Le rang *n* cherché est 62 500 : $u_{62499} \simeq 24999,76$ et $u_{62500} \simeq 25000,16$.

Exercice 14: *Suite arithmético-géométrique*

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80 % ainsi que l'apparition de 4000 nouveaux abonnés. La politique du club fait que seuls les abonnés peuvent assister aux rencontres de l'équipe première. On note a_n le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2010+n$ et on précise que $a_0 = 7000$ pour l'année 2010.

1) *Calculer le nombre d'abonnés en 2011 puis en 2012.*

Un taux de réabonnement de 80 % traduit une baisse de 20 % des réabonnements.

→le coefficient multiplicateur associé à cette baisse est égal à 0,8.

En 2011 : $a_1 = 7000\times 0,8+4000 = 9600$

En 2012 : $a_2 = 9600\times 0,8+4000 = 11680$

2) *Expliquer pourquoi* $\forall n\in\mathbb{N}\ a_{n+1} = 0,8a_n+4000$.

Avec le coefficient précédent, on peut généraliser le calcul de chaque indice :

$$a_{n+1} = 0,8a_n+4000$$

3) *On pose* $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n = 20\ 000 - a_n$.

Montrer que (u_n) *est une suite géométrique dont on précisera la raison et* u_0.

$$u_{n+1} = 20\ 000 - a_{n+1} = 20\ 000 - (0,8a_n + 4\ 000) = 20\ 000 - 0,8a_n - 4\ 000 = 16\ 000 - 0,8a_n$$

$$= 0,8\left(\frac{16\ 000}{0,8} - a_n\right) = 0,8(20\ 000 - a_n) = 0,8\times u_n$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ de 1er terme $u_0 = 20\ 000 - a_0 = 13\ 000$.

4) *Donner la formule explicite de* (u_n) *puis de* (a_n).

$$u_n = u_0\times q^n = 13\ 000\times 0,8^n$$

$u_n = 20\ 000 - a_n$ donc $a_n = 20\ 000 - u_n = 20\ 000 - 13\ 000\times 0,8^n$

5) *Le club envisage la construction d'un nouveau stade. Quelle capacité faut-il envisager ?*

La suite (a_n) représente le nombre de spectateurs :

$0 < 0,8 < 1$ donc $\lim 0,8^n = 0$ et $\lim 13\ 000\times 0,8^n = 0$

Et $\lim 20\ 000 - 13\ 000\times 0,8^n = 20\ 000$.

Il devrait y avoir 20 000 abonnés d'où une capacité équivalente à anticiper pour le futur stade.

6) *Actuellement, la capacité du stade est de 18 500 places. A l'aide de l'algorithme ci-dessous, déterminer en quelle année le stade ne pourra plus accueillir l'ensemble des abonnés.*

Variables : *N* est un nombre entier naturel non nul.

A est un nombre réel

Initialisation : Affecter à *A* la valeur **7 000**

Affecter à *N* la valeur **0**

Traitement : Tant que **A < 18 500**

Affecter à A la valeur **0,8*A+4000** **// A Prend_la_valeur 0,8*A+4000**

Affecter à **N la valeur N+1** **// N Prend_la_valeur N + 1**

Fin de tant que

Sortie : Afficher **2010+N**

On peut soit faire un programme similaire avec la calculatrice :

```
PROGRAM:STADE
:7000→A
:0→N
:While A<18500
:N+1→N
:.8A+4000→A
:End
:Disp "ANNEE=",2010+N
```

Soit simplement entrer la fonction : Y = 20 000 – 13 000*0,8^N

Et tester des valeurs de N ou utiliser la table

→on obtient : N = 10 , soit en 2020.

En 2020, le stade ne pourra plus accueillir les abonnés du club.