Exercices sur les variations de suites définies par une formule explicite

Exercice 2A.1 :

Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = 3n+1$ pour $n \geq 0$ b) $u_n = \frac{3n}{5}+1$ pour $n \geq 1$ c) $u_n = -\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$

d) $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ e) $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 0$ f) $v_n = \frac{1}{5n}$ pour $n \geq 1$

g) $u_n = 1+\frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ h) $v_n = n+\frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ i) $u_n = -\frac{n}{4}+\frac{1}{3}$ $(n \in \mathbb{N})$

Exercice 2A.2 :

Etudier le sens de variation des suites ci-dessous :

a) $u_n = n^2-1$ pour $n \geq 0$ b) $v_n = n^2+4n$ $(n \in \mathbb{N})$ c) $v_n = n^2-4n$ $(n \in \mathbb{N})$

d) $u_n = 2n^2-3$ pour $n \geq 1$

Exercice 2A.3 :

Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

a) $v_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \geq 1$ b) $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$ pour $n \geq 0$

Exercice 2A.4 :

Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = 2^n$ pour $n \geq 0$ b) $w_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$ pour $n \geq 0$ c) $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour $n > 0$

d) $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ pour $n \geq 0$ e) $u_n = \frac{3^n}{n}$ pour $n > 0$ f) $u_n = \frac{0,2^n}{10n}$ pour $n > 0$

g) $u_n = \frac{1,2^n}{25n}$ pour $n > 0$ h) $u_n = \frac{1,5^n}{n^2}$ pour $n > 0$ i) $u_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$ pour $n \geq 0$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – *Montpellier – M. Quet*

Exercice 2A.1 : *Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :*

a) $u_n = 3n+1$ pour $n \geq 0$

$$u_{n+1} - u_n = (3(n+1)+1) - (3n+1) = 3n+4-3n-1 = 3$$

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante

b) $u_n = \frac{3n}{5} + 1$ pour $n \geq 1$, donc : $u_{n+1} = \frac{3(n+1)}{5} + 1 = \frac{3n+3}{5} + 1$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{3n+3}{5} + 1\right) - \left(\frac{3n}{5} + 1\right) = \frac{3n+3}{5} + 1 - \frac{3n}{5} - 1 = \frac{3n+3}{5} - \frac{3n}{5} = \frac{3}{5}$$

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

c) $u_n = -\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2n}{3} - \frac{1}{2}$$

$u_{n+1} - u_n = \frac{-2n-2+2n}{3} = -\frac{2}{3}$: $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

d) $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n} - \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{n+1} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}$$

Or $n \geq 1$ donc $n(n+1) > 0$ et $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{1} = \frac{n}{n+1}$$

Or $n < n+1$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ avec $u_n > 0$: la suite positive (u_n) est décroissante

e) $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 0$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} \times \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2}{n+2} = \frac{(n+1)-(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{n+1-n-2}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$$

Or $n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+2} \times \frac{n+1}{1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Or $n+1 < n+2$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ avec $u_n > 0$: la suite (u_n) est décroissante

f) $v_n = \frac{1}{5n}$ pour $n \geq 1$ → tous les termes de la suite (v_n) sont positifs

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{5(n+1)}}{\frac{1}{5n}} = \frac{1}{5(n+1)} \times \frac{5n}{1} = \frac{5n}{5(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Or $n < n+1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < 1$ donc la suite (v_n) est décroissante.

g) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

$u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ → $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1 \times n}{(n+1) \times n} - \frac{1 \times (n+1)}{n \times (n+1)} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}$$

$u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

h) $v_n = n + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

$v_n = n + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ → $v_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{n+1}$

$$v_{n+1} - v_n = \left(n + 1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(n + \frac{1}{n}\right) = \boxed{n} + 1 + \frac{1}{n+1} \boxed{-n} - \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{n(n+1)} + \frac{n}{n(n+1)} - \frac{(n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}$$

Si $n \geq 1$ donc $n(n+1) \geq 2$ alors $n(n+1) - 1 \geq 1$

Ainsi $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite (v_n) est croissante.

i) $u_n = -\frac{n}{4} + \frac{1}{3}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{n+1}{4} + \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{n}{4} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{n+1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{n}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-n-1+n}{4} = -\frac{1}{4}$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

La Merci MONTPELLIER

Exercice 2A.2 : *Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :*

a) $u_n = n^2 - 1$ pour $n \geq 0$

$$u_{n+1} - u_n = \left((n+1)^2 - 1\right) - \left(n^2 - 1\right) = (n+1)^2 - 1 - n^2 + 1 = (n+1)^2 - n^2$$

$$= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Or $n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante pour tout $n \geq 0$.

b) $v_n = n^2 + 4n$ $(n \in \mathbb{N})$

$$v_{n+1} - v_n = \left((n+1)^2 + 4(n+1)\right) - \left(n^2 + 4n\right) = (n+1)^2 + 4n + 4 - n^2 - 4n$$

$$= n^2 + 2n + 1 + 4 - n^2 = 2n + 5$$

$2n + 5 > 0 \Leftrightarrow 2n > -5 \Leftrightarrow n > -\frac{5}{2}$, ce qui est toujours vrai car $n > 0$

donc la suite (v_n) est croissante.

c) $v_n = n^2 - 4n \quad (n \in \mathbb{N})$

$$v_{n+1} - v_n = \left((n+1)^2 - 4(n+1)\right) - \left(n^2 - 4n\right) = (n+1)^2 - 4n - 4 - n^2 + 4n$$
$$= n^2 + 2n + 1 - 4 - n^2 = 2n - 3$$

$2n - 3 > 0 \iff 2n > 3 \iff n > \frac{3}{2}$, donc la suite (v_n) est croissante à partir du rang $n = 2$

d) $u_n = 2n^2 - 3$ pour $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \left(2(n+1)^2 - 3\right) - \left(2n^2 - 3\right) = 2(n+1)^2 - 3 - 2n^2 + 3 = 2\left(n^2 + 2n + 1\right) - 2n^2$$
$$= 2n^2 + 4n + 2 - 2n^2 = 4n + 2$$

Or $n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2A.3 : *Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :*

a) $v_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \geq 1$ $\rightarrow v_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)} - \frac{n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

Or $n \geq 0$ donc $\frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$, d'où $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite (v_n) est croissante.

2ème METHODE : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n} + \frac{1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n}$

Or $n \geq 0$ donc $1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1$, d'où $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ et la suite (v_n) est croissante.

b) $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$ pour $n \geq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2}}{\frac{2n+1}{n+2}} = \frac{\frac{2n+3}{n+3}}{\frac{2n+1}{n+2}} = \frac{2n+3}{n+3} \times \frac{n+2}{2n+1} = \frac{2n^2+4n+3n+6}{2n^2+n+6n+3} = \frac{2n^2+7n+6}{2n^2+7n+3}$$
$$= \frac{2n^2+7n+3}{2n^2+7n+3} + \frac{3}{2n^2+7n+3} = 1 + \frac{3}{2n^2+7n+3}$$

Or $n \geq 0$, donc $2n^2 + 7n + 3 > 0$ et $1 + \frac{3}{2n^2+7n+3} > 1$

Ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et la suite (u_n) est croissante pour tout $n \geq 0$.

Autre méthode :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+3}{n+3} \times \frac{n+2}{n+2} - \frac{2n+1}{n+2} \times \frac{n+3}{n+3}$$
$$= \frac{2n^2+4n+3n+6}{(n+3)(n+2)} - \frac{2n^2+6n+n+3}{(n+2)(n+3)} = \frac{2n^2+4n+3n+6-\left(2n^2+6n+n+3\right)}{(n+3)(n+2)}$$

$$=\frac{2n^2+7n+6-2n^2-7n-3}{(n+3)(n+2)}=\frac{3}{(n+3)(n+2)}$$

Or $n\geq 0$, donc $\dfrac{3}{(n+3)(n+2)}>0$

Ainsi $u_{n+1}-u_n>0$: la suite (u_n) est croissante pour tout $n\geq 0$.

Exercice 2A.4 : *Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :*

a) $u_n=2^n$ pour $n\geq 0$

$$u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-2^n=2^n\times 2^1-2^n\times 1=2^n(2-1)=2^n$$

ainsi $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite positive (u_n) est croissante

Autre méthode :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=\frac{2^n\times 2^1}{2^n}=2$$

donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ avec $u_n>0$: la suite positive (u_n) est croissante.

b) $w_n=\left(\dfrac{7}{9}\right)^n$ pour $n\geq 0$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}}{\left(\frac{7}{9}\right)^n}=\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1-n}=\frac{7}{9}$$

Ainsi $0<\dfrac{w_{n+1}}{w_n}<1$ et la suite positive (w_n) est décroissante.

c) $w_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour $n>0$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-n}=\frac{1}{3}$$

Ainsi $0<\dfrac{w_{n+1}}{w_n}<1$ donc la suite positive (w_n) est décroissante.

d) $u_n=\dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$ pour $n>0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}}=\frac{\frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}}=\frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}\times\frac{3^{2n}}{2^{3n}}=\frac{2^{3n+3}}{2^{3n}}\times\frac{3^{2n}}{3^{2n+2}}=2^3\times\frac{1}{3^2}=\frac{8}{9}$$

Cette suite est positive et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ donc la suite (u_n) est décroissante.

e) $u_n=\dfrac{3^n}{n}$ pour $n>0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}}=\frac{3^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}\times\frac{n}{n+1}=3\times\frac{n}{n+1}=\frac{3n}{n+1}$$

Or $n\geq 1 \iff n+n\geq n+1$

Et pour $n\geq 2$: $2n>n+1$

Donc : $3n>n+1 \iff \dfrac{3n}{n+1}>1$ et la suite positive (u_n) est strictement croissante.

Autre méthode : on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 en étudiant le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-1=\frac{3n}{n+1}-1=\frac{3n}{n+1}-\frac{n+1}{n+1}=\frac{2n-1}{n+1}$$

Or $n\geq 1$ donc : $n+1>0$ et $2n-1>0$

Ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1>0 \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$: la suite positive (u_n) est strictement croissante.

f) $u_n=\dfrac{0,2^n}{10n}$ pour $n>0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{0,2^{n+1}}{10(n+1)}}{\frac{0,2^n}{10n}}=\frac{0,2^{n+1}}{10(n+1)}\times\frac{n}{3^n}=\frac{0,2^{n+1}}{0,2^n}\times\frac{10n}{10(n+1)}=0,2\times\frac{n}{n+1}=\frac{0,2n}{n+1}$$

Or $n<n+1 \iff \dfrac{n}{n+1}<\dfrac{n+1}{n+1} \iff \dfrac{n}{n+1}<1$ et : $0,2\times\dfrac{n}{n+1}<\dfrac{n}{n+1}<1$

Donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ et la suite positive (u_n) est strictement décroissante.

Autre méthode : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{0,2n}{n+1}=\dfrac{n+1-0,8n-1}{n+1}=\dfrac{n+1}{n+1}-\dfrac{0,8n+1}{n+1}=1-\dfrac{0,8n+1}{n+1}$

Or $n>0 \iff 0,8n+1>0 \iff 0,8n+1>0 \iff 1-\dfrac{0,8n+1}{n+1}<1$

Donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ et la suite positive (u_n) est strictement décroissante.

Autre méthode : on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 en étudiant le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-1=\frac{0,2n}{n+1}-1=\frac{0,2n}{n+1}-\frac{n+1}{n+1}=\frac{-0,8n-1}{n+1}$$

Or $n\geq 1$ donc : $n+1>0$ et $-0,8n-1<0$

Ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1<0 \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$: la suite positive (u_n) est strictement décroissante.

g) $u_n = \dfrac{1,2^n}{25n}$ pour $n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1,2^{n+1}}{25(n+1)}}{\dfrac{1,2^n}{25n}} = \frac{1,2^{n+1}}{25(n+1)} \times \frac{25n}{1,2^n} = \frac{1,2^{n+1}}{1,2^n} \times \frac{25n}{25(n+1)} = 1,2 \times \frac{n}{n+1} = \frac{1,2n}{n+1}$$

$$= \frac{n+1+0,2n-1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{0,2n-1}{n+1} = 1 + \frac{0,2n-1}{n+1}$$

Or : $0,2n - 1 > 0 \iff 0,2n > 1 \iff n > \dfrac{1}{0,2} \iff n > 5$

Donc la suite positive (u_n) est croissante à partir du rang 6.

h) $u_n = \dfrac{1,5^n}{n^2}$ pour $n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1,5^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{1,5^n}{n^2}} = \frac{1,5^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{1,5^n} = \frac{1,5^{n+1}}{1,5^n} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,5 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

Or : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 > 1 \iff \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 > \dfrac{2}{3} \iff \dfrac{n}{n+1} > \sqrt{\dfrac{2}{3}} \iff n > \sqrt{\dfrac{2}{3}}(n+1)$

$$\iff n > \sqrt{\frac{2}{3}} \times n + \sqrt{\frac{2}{3}} \iff n - \sqrt{\frac{2}{3}} \times n > \sqrt{\frac{2}{3}} \iff n\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) > \sqrt{\frac{2}{3}} \iff n > \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$\iff n > 4,45$$

Donc cette suite est croissante pour tout $n \geq 5$.

Autre méthode :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \ldots = 1,5 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - 1 = \frac{1,5n^2}{(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{1,5n^2}{(n+1)^2} - \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2} = \frac{0,5n^2-2n-1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^2-4n-2}{2(n+1)^2}$$

Le dénominateur est positif.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 16 + 8 = 24$ d'où deux racines :

$$n_1 = \frac{4 - \sqrt{24}}{2 \times 1} = 2 - \sqrt{6} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{4 + \sqrt{24}}{2 \times 1} = 2 + \sqrt{6}$$

$a = 1$ donc la parabole est « dirigée vers le haut » et, pour $n > 0$:

$n^2 - 4n - 2 > 0$ si $n > 2 + \sqrt{6}$ et : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0 \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$: (u_n) est croissante

$n^2 - 4n - 2 < 0$ si $n < 2 + \sqrt{6}$ et : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0 \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$: (u_n) est décroissante

h) $u_n = \dfrac{5^n}{3^{n+1}}$ pour $n \geq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{5^{n+1}}{3^{n+1+1}}}{\dfrac{5^n}{3^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{5^n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} \times \frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$: la suite est croissante.

Autre méthode :

$$u_n = \frac{5^n}{3^{n+1}} = \frac{5^n}{3 \times 3^n} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

On reconnait l'expression d'une suite géométrique de premier terme positif égal à $\frac{1}{3}$ et de raison $q = \frac{5}{3} > 1$, donc la suite est croissante.