Exercices – Etude de deux fonctions bénéfice

Exercice 1 :

Une entreprise fabrique un produit « Bêta ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.
Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de *x* milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$$

La représentation graphique Γ de la fonction coût total est donnée dans l'annexe ci-dessous à rendre avec la copie.
On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?
2. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de *x* milliers d'articles du produit « Bêta ». On a donc : $R(x) = 8x$.

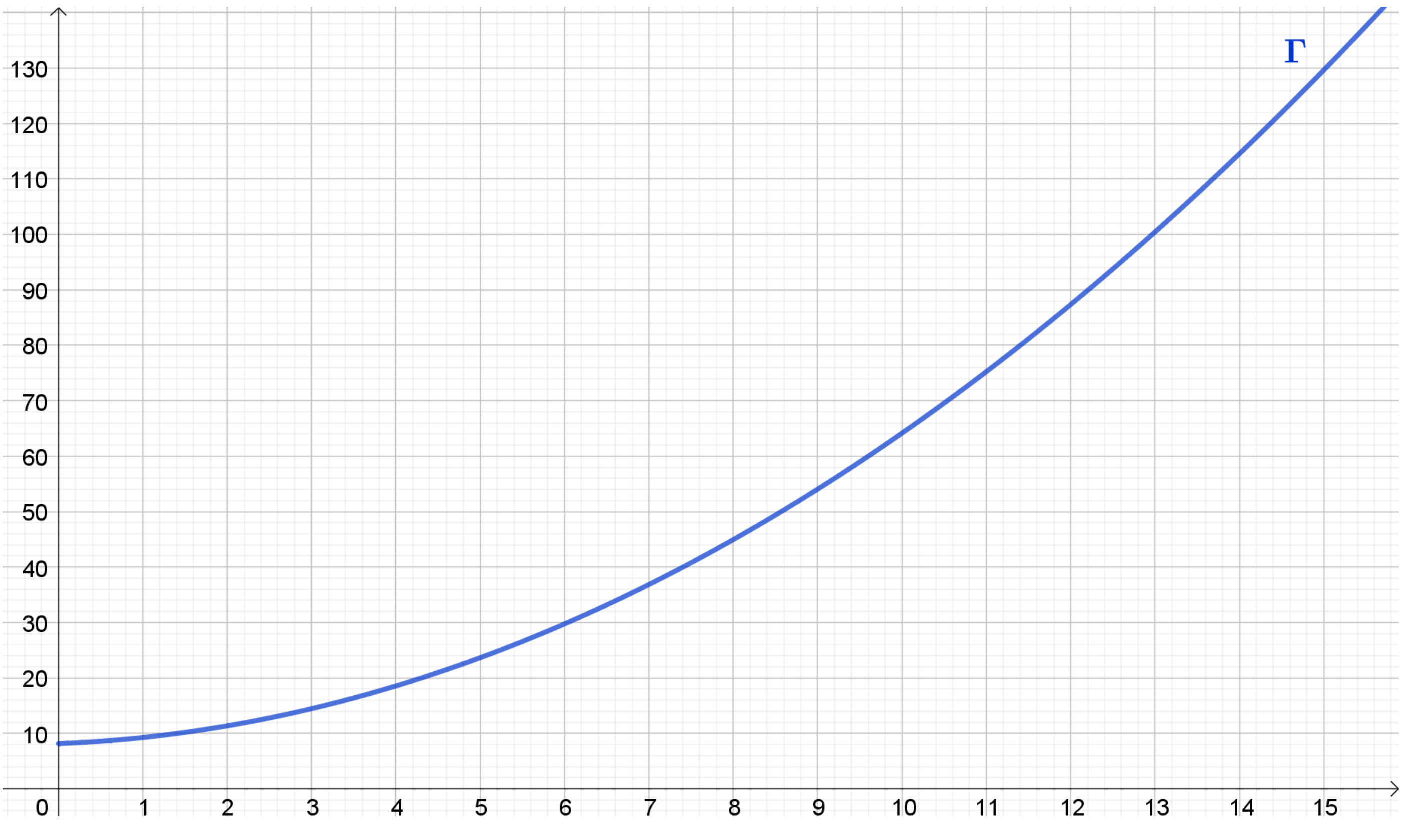
   2. a. Tracer dans le repère donné en annexe la courbe D représentative de la fonction recette.

   2. b. Par lecture graphique, déterminer :
      - l'intervalle dans lequel doit se situer la production *x* pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
      - la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend *x* milliers d'articles.

   3. a. Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend *x* milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$ avec $x \in]0;15]$.

   3. b. Étudier le signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).

   3. c. Étudier les variations de la fonction B sur $]0;15]$.
   En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal.
   Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

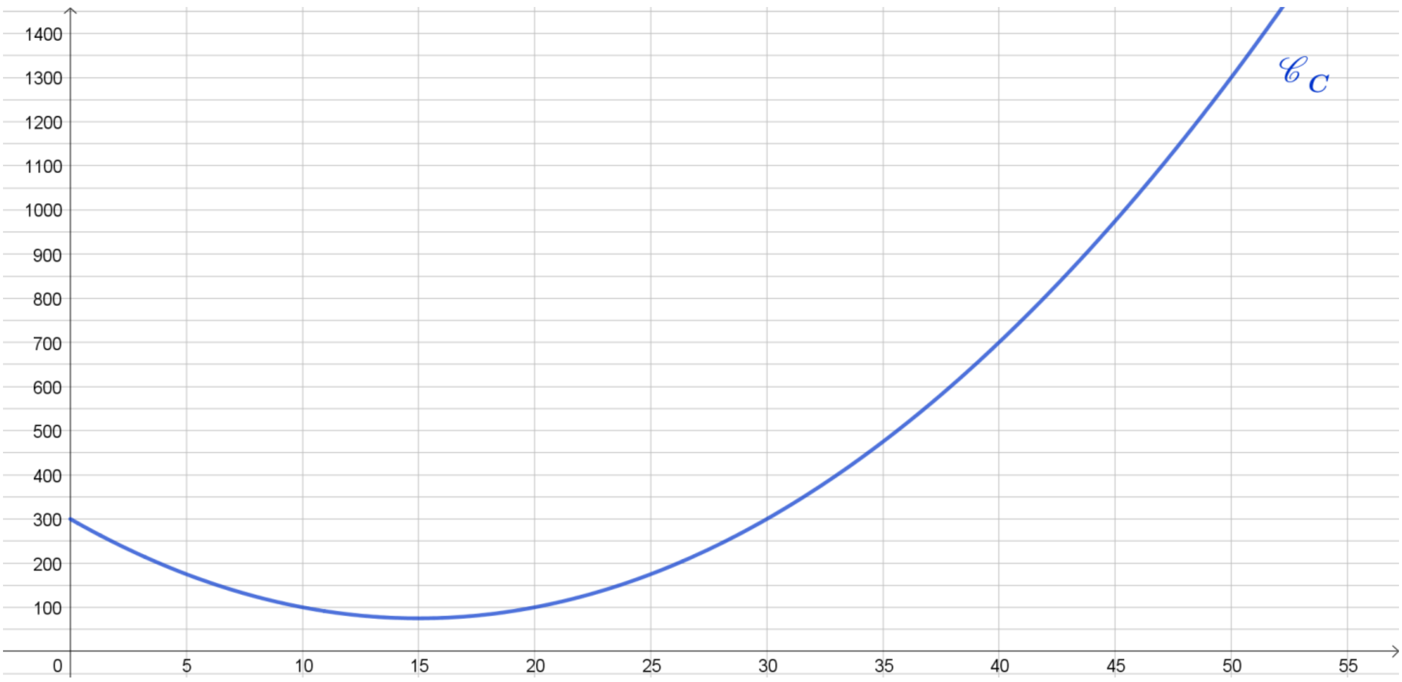


Exercice 2 :

Une entreprise fabrique chaque jour x milliers d'objets avec $x \in [0;60]$. Le coût total de production de ces objets, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x) = x^2 - 30x + 300$$

1. Étudier les variations de C sur $[0;60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer les images aux bornes.
2. Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 10 euros.
   Calculer, en fonction de x, la recette $R(x)$ exprimée aussi en milliers d'euros.
3. Justifier que le bénéfice, exprimé aussi en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers d'objets est donné, pour $x \in [0;60]$, par :
   $$B(x) = -x^2 + 40x - 300$$
4. Étudier les variations de B sur $[0;60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer les images aux bornes.
5. En déduire la quantité à produire permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal.
   Quel est ce bénéfice maximal ?
6. *Inéquation et interprétation.*
   6. a. Résoudre l'inéquation $B(x) \geq 0$.
   6. b. Déduire de la question précédente les quantités que l'entreprise doit produire et vendre pour que la production soit rentable.
7. Sur le deuxième graphique de l'annexe, on a tracé $\mathscr{C}_C$, la courbe représentative de la fonction C.
   Construire $\mathscr{C}_R$, la courbe représentative de la fonction recette R et expliquer comment graphiquement retrouver le résultat de la question précédente.
8. Retrouver graphiquement le bénéfice maximal. Expliquez votre raisonnement et visualisez ce bénéfice maximal sur le graphique à l'aide de couleur.



Bonus

Résoudre l'équation : $(x+3)^4 - 3(x+3)^2 + 2 = 0$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 1 :

Une entreprise fabrique un produit « Bêta ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles. Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ *par :*

$$C(x)=0,5x^2+0,6x+8,16$$

La représentation graphique Γ de la fonction coût total est donnée dans l'annexe ci-dessous à rendre avec la copie.
On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8 €.

1. *Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?*

Le bénéfice s'obtient en calculant les recettes moins les coûts donc :

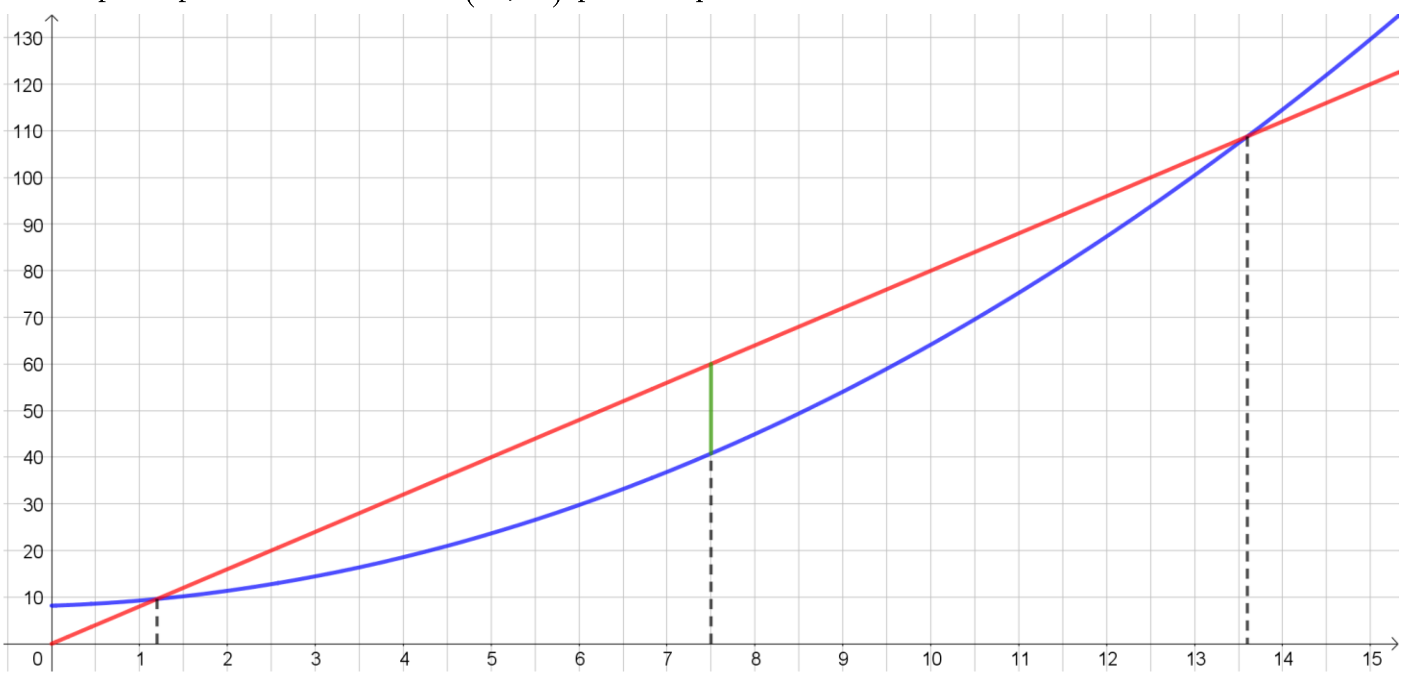
- Fabriquer et vendre 4 000 articles donne un bénéfice en milliers d'euros de :
  $4\times 8-C(4)=13,44$ soit 13 440 €,
- Fabriquer et vendre 12 000 articles donne un bénéfice de :
  $12\times 8-C(12)=8,64$ soit 8 640 €.

Il est donc préférable pour l'entreprise de fabriquer et vendre 4 000 articles.

2. *On désigne par* $R(x)$ *le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit « Bêta ». On a donc :* $R(x)=8x$.

2. a. *Tracer dans le repère donné en annexe la courbe D représentative de la fonction recette.*

La fonction R est une fonction linéaire donc sa courbe est une droite passant par l'origine du repère et par le point de coordonnées $(10;80)$ par exemple.



2. b. *Par lecture graphique, déterminer :*

- *l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;*
- *la production* x_0 *pour laquelle le bénéfice est maximal.*

Le bénéfice est positif lorsque la courbe des recettes est au-dessus de celle des coûts donc graphiquement lorsque $x\in[1,2;13,5]$ environ. Ce qui correspond à une production comprise entre 1200 et 13 500 articles.

Le bénéfice est maximal lorsque l'écart entre les deux courbes est le plus grand et positif, soit environ pour $x_0=7,5$. Ce qui correspond à une production de 7 500 unités.

Ce bénéfice est d'environ 20 milliers d'euros.

3. *On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.*

3. a. *Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par* $B(x)=-0,5x^2+7,4x-8,16$ *avec* $x\in]0;15]$.

Le bénéfice s'obtient en calculant les recettes moins les coûts donc en milliers d'euros on a :

$$B(x)=R(x)-C(x)=8x-\left(0,5x^2+0,6x+8,16\right)=-0,5x^2+7,4x-8,16$$

3. b. *Étudier le signe de* $B(x)$. *En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).*

$\Delta=7,4^2-4\times(-0,5)\times(-8,16)=38,44=6,2^2$ → $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-7,4-6,2}{2\times(-0,5)}=\frac{-13,6}{-1}=13,6 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-7,4+6,2}{2\times(-0,5)}=\frac{-1,2}{-1}=1,2$$

$a=-0,5$ donc $a<0$: la parabole est « orientée vers le bas ».

L'expression est du signe de $a=-0,5$ soit négative à l'extérieur des racines et positive entre.

Ainsi $B(x)>0$ si $x\in[1,2;13,6]$

→ le bénéfice est positif pour une production comprise entre 1200 et 13 600 articles

3. c. *Étudier les variations de la fonction B sur* $]0;15]$.

En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal.

Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

$a=-0,5$ donc $a<0$: la parabole est « orientée vers le bas ».

L'abscisse de son sommet est donné par la formule $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-7,4}{2\times(-0,5)}=7,4$:

La fonction bénéfice est croissante sur l'intervalle $]0;7,4]$ et décroissante sur $[7,4;15]$.

Le bénéfice est donc maximal pour une production égale à 7400 articles et vaut :

$$B(7,4)=19,22$$

Soit un bénéfice maximal de 19 220 €.