

Exercices sur le productivité d'entreprises

Exercice 1 : Optimisation de bénéfice

Une entreprise fabrique chaque jour x objets avec $x \in [0 ; 60]$.

Le coût total de production de ces objets, exprimé en euros, est donné par $f(x) = x^2 - 20x + 200$

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $x \in [0 ; 60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer $f(0)$ et $f(60)$.

On rappelle que l'extremum d'une parabole est obtenu pour $x = \frac{-b}{2a}$, nul besoin ici de chercher les racines de ce polynôme.

2. Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 34 euros. Calculer, en fonction de x , la recette $R(x)$.
3. Justifier que le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x objets est donné, pour $x \in [0 ; 60]$, par : $g(x) = -x^2 + 54x - 200$.

4. Étudier les variations de g sur l'intervalle $x \in [0 ; 60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer $g(0)$ et $g(60)$.

On rappelle que l'extremum d'une parabole est obtenu pour $x = \frac{-b}{2a}$, nul besoin ici de chercher les racines de ce polynôme.

5. En déduire la quantité à produire permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?
6. Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 0$.
Déduire de la question précédente les quantités que l'entreprise doit produire et vendre pour que la production soit rentable.

Exercice 2 : Optimisation de bénéfice

Une entreprise fabrique un produit « Champion ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.

Le **coût total**, exprimé en **milliers** d'euros, de fabrication de x **milliers** d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ par :

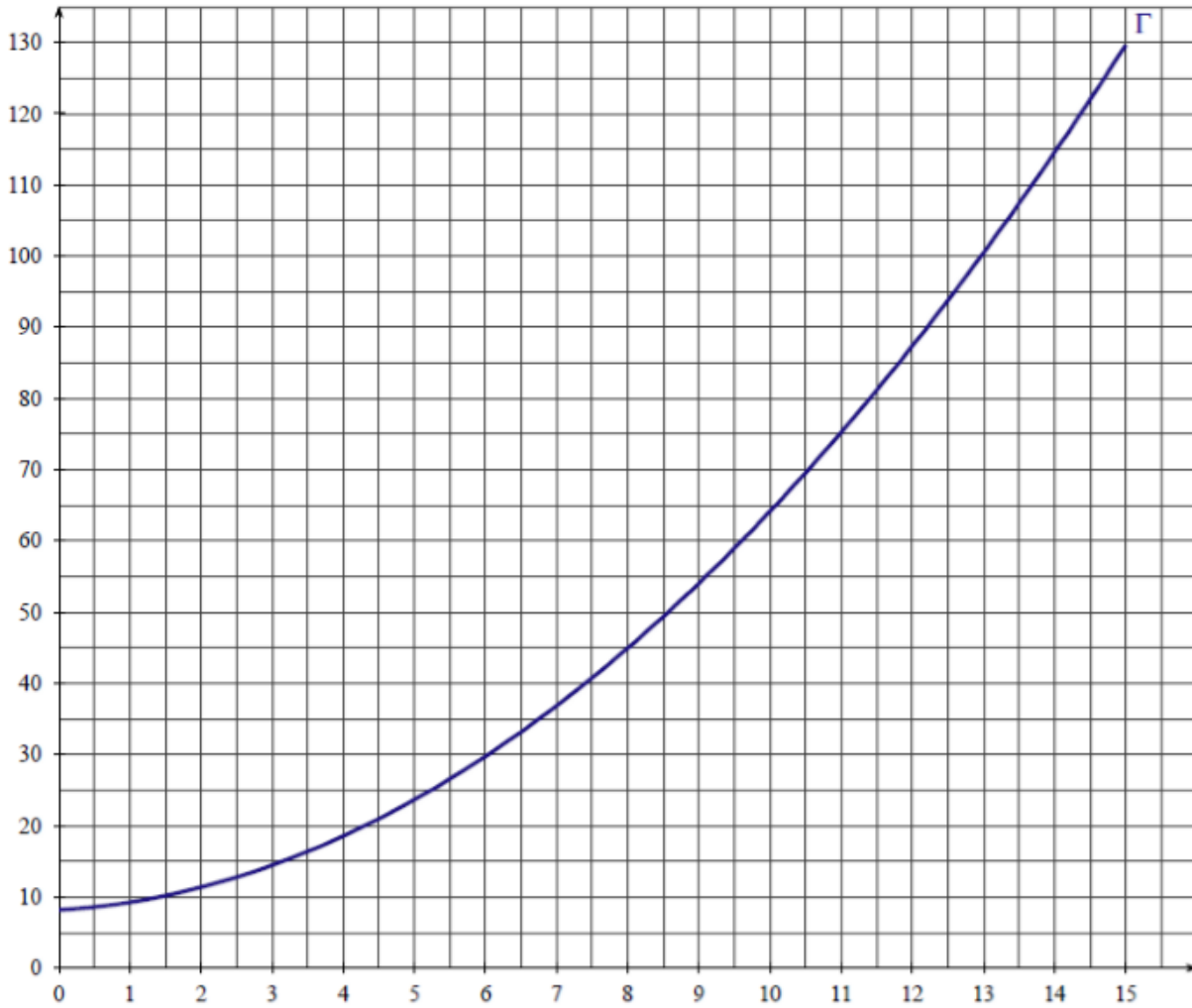
$$C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$$

On admet que chaque millier d'articles fabriqués est vendu au prix de 8 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?
2. On désigne par $R(x)$ le montant en **milliers** d'euros de la **recette mensuelle** obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit «Champion». On a donc $R(x) = 8x$.
 - a) Tracer dans le repère donné en annexe la courbe D représentative de la fonction recette.
 - b) Par lecture graphique déterminer :
 - l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
 - la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.

- a) Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$ avec $x \in]0;15]$.
- b) Signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).
- c) Étudier les variations de la fonction B sur $]0;15]$.

ANNEXE : Notre Dame de La Merci



CORRIGE - Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 1 : Optimisation de bénéfice

Une entreprise fabrique chaque jour x objets avec $x \in [0 ; 60]$.

Le coût total de production de ces objets, exprimé en euros, est donné par $f(x) = x^2 - 20x + 200$

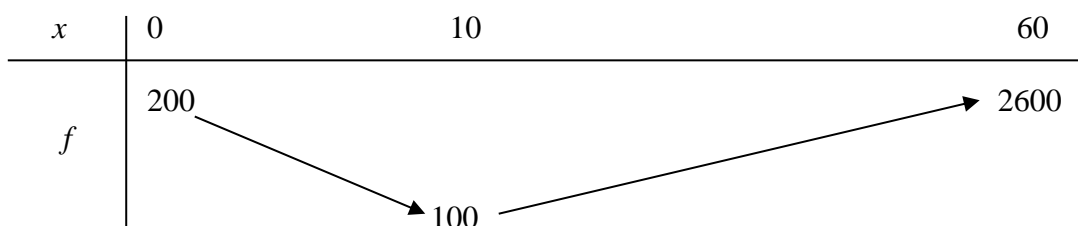
1. $f(x) = x^2 - 20x + 200$: $a > 0$ donc la parabole est orientée « vers le haut » et son extremum est

obtenu pour $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-20)}{2} = 10$:

$\rightarrow f$ est décroissante pour tout $x \in [0 ; 10]$ et croissante pour tout $x \in [10 ; 60]$.

$$f(0) = 0^2 - 20 \times 0 + 200 = 200 ; f(60) = 60^2 - 20 \times 60 + 200 = 3600 - 1200 + 200 = 2600$$

$$f(10) = 10^2 - 20 \times 10 + 200 = 100 - 200 + 200 = 100$$



2. Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 34 euros. La recette est : $R(x) = 34x$

3. Le bénéfice est la différence entre la recette et les coûts, donc pour tout $x \in [0 ; 60]$:

$$g(x) = R(x) - f(x) = 34x - (x^2 - 20x + 200) = 34x - x^2 + 20x - 200 = -x^2 + 54x - 200$$

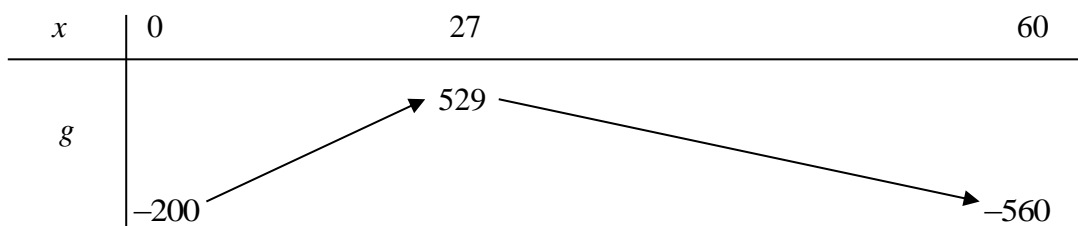
4. $g(x) = -x^2 + 54x - 200$: $a < 0$ donc la parabole est orientée « vers le bas » et son extremum est

obtenu pour $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-54}{2 \times (-1)} = 27$:

$\rightarrow g$ est croissante pour tout $x \in [0 ; 27]$ et décroissante pour tout $x \in [27 ; 60]$.

$$g(0) = -0^2 + 54 \times 0 - 200 = -200 ; g(60) = -60^2 + 54 \times 60 - 200 = -3600 + 3240 - 200 = -560$$

$$g(27) = -27^2 + 54 \times 27 - 200 = -729 + 1458 - 200 = 529$$



5. Le bénéfice est maximal pour une quantité de 27 objets. Ce bénéfice maximal est égal à 529 €.

6. $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 54x - 200 \geq 0$: $\Delta = 54^2 - 4 \times (-1) \times (-200) = 2916 - 800 = 2116 = 46^2$

$$x_1 = \frac{-54 - 46}{2 \times (-1)} = \frac{-100}{-2} = 50 \text{ et } x_2 = \frac{-54 + 46}{2 \times (-1)} = \frac{-8}{-2} = 4 :$$

$g(x) \geq 0$ si $x \in [4 ; 50]$: la production soit rentable entre 5 et 49 objets.

Exercice 2 : Optimisation de bénéfice

Une entreprise fabrique un produit « Champion ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.

Le **coût total**, exprimé en **milliers** d'euros, de fabrication de x **milliers** d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0 ; 15]$ par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$$

On admet que chaque millier d'articles fabriqués est vendu au prix de 8 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?

→ Pour 4 000 articles : $4 \times 8 - C(4) = 32 - (0,5 \times 4^2 + 0,6 \times 4 + 8,16) = 13,44 \text{ €}$

→ Pour 12 000 articles : $12 \times 8 - C(12) = 96 - (0,5 \times 12^2 + 0,6 \times 12 + 8,16) = 8,64 \text{ €}$

2. On désigne par $R(x)$ le montant en **milliers** d'euros de la **recette mensuelle** obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit «Champion». On a donc $R(x) = 8x$.

c) Tracer dans le repère donné en annexe la courbe D représentative de la fonction recette.

→ droite tracée en rouge

d) Par lecture graphique déterminer :

L'entreprise réalise un bénéfice positif si la production x est environ comprise entre 1,2 et 13,6 soit environ entre 1200 et 13600 articles.

Le bénéfice semble maximal pour une production x_0 environ égale à 7,3 soit environ 7300 articles.

3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.

d) Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$ avec $x \in]0;15]$.

$$B(x) = R(x) - C(x) = 8x - (0,5x^2 + 0,6x + 8,16) = 8x - 0,5x^2 - 0,6x - 8,16 = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$$

e) Signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).

$$\text{Discriminant : } \Delta = 7,4^2 - 4 \times (-0,5) \times (-8,16) = 38,44 = 6,2^2$$

$$\text{Deux racines : } x_1 = \frac{-7,4 - 6,2}{2 \times (-0,5)} = \frac{-13,6}{-1} = 13,6 \text{ et } x_2 = \frac{-7,4 + 6,2}{2 \times (-0,5)} = \frac{-1,2}{-1} = 1,2$$

Le bénéfice est positif si $x \in]1,2;13,6[$ soit une prod. comprise entre 1200 et 13600 articles

f) Étudier les variations de la fonction B sur $]0;15]$.

→ $a = -0,5$ donc $a < 0$ donc le polynôme associé à la fonction B est orienté « vers le bas »

$$\text{Son sommet est donné par } \frac{-b}{2a} = \frac{-7,4}{2 \times (-0,5)} = \frac{-7,4}{-1} = 7,4$$

Ainsi la fonction B est croissante si $x \in]0;7,4]$ et décroissante si $x \in]7,4;15]$.

Le **bénéfice est maximal** pour 7400 articles fabriqués et vendus chaque mois.

Ce **bénéfice maximal** est donné par $B(7,4) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16 = 19,22$ soit 19 220 €.

ANNEXE : CORRIGE – Notre Dame de La Merci

