GENERALITES SUR LES SUITES

. Notion de suite

Exo1 : pour chaque suite donnée, calculer les termes de rang 0, 1, 2, 3 et 100

1) $U_n = \frac{n+2}{n+3}$ 2) $U_n = \cos\frac{\pi n}{2}$ 3) $U_n = (-1)^n$

4) $U_n = 2^n + 1$ 5) $U_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Exo2 : pour chaque suite donnée, calculer, en fonction de n, les termes :

U_{n-1} ; U_{n+1} ; U_{n+2} ; U_{3n} ; U_{3n-1}

1) $U_n = \frac{5}{n}$ 2) $U_n = \frac{2n-1}{n+2}$ 3) $U_n = (-2)^n + 1$

4) $U_n = n^2 + n$ 5) $U_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 5$

Exo3 : chaque suite (U_n) est définie par $U_0 = 1$ et par une relation de récurrence

calculer U_1, U_2, U_3, U_4

1) $U_{n+1} = 2U_n + 1$ 2) $U_{n+1} = \frac{5+U_n}{2-U_n}$

3) $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 3}$ 4) $U_{n+1} = \cos U_n$ (en radians)

. Représentation graphique

Exo4 : représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (U_n) définie par $U_n = 2n - 5$

Exo5 : soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = \frac{3}{4}$ et $U_{n+1} = U_n^2$

1) dans un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), tracer la courbe représentative C_f de la fonction $f : x \mapsto x^2$ et tracer la droite d d'équation $y = x$
2) représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (U_n).

. Variations de la suite (U_n)

conseil : bien relire la remarque pratique du cours, et ne pas oublier que n est un entier naturel

Exo6 : étudier le sens de variation des suites (U_n) définies par :

1) $U_n = n^2 - 1$ 2) $U_n = \frac{3}{2n-1}$ 3) $U_n = 1 - \sqrt{n}$

4) $U_n = \frac{5^n}{4^{n+1}}$ 5) $U_n = (-2)^n$

. Propriétés éventuelles de (U_n)

Exo7 : soit (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{2n+5}{n+1}$

1) étudier le sens de variation de (U_n)

2) en déduire que (U_n) est majorée

Exo8 : soit (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{n}{2} + \frac{8}{n}$

1) déterminer une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(n) = U_n$

2) étudier la fonction f sur $]0;+\infty[$

3) la suite (U_n) est-elle monotone ? majorée ? minorée ?

Exo9 : la suite (U_n) définie par $U_n = \cos\frac{2n\pi}{5}$ est –elle périodique ?

si oui, préciser sa période

. **Démonstration par récurrence**

Exo10 : soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$

1) démontrer par récurrence que (U_n) est majorée par 4 et minorée par 0

2) démontrer par récurrence que (U_n) est croissante

conseil : relire attentivement le principe de la démonstration, et soigner la rédaction

. **Limite d'une suite**

Exo11 : voici des suites ; quelles sont les suites convergentes ?
donner leur limite

$U_n = n^2 - 1$; $V_n = \frac{-2}{n^2+1}$; $W_n = \frac{1}{n^2} + 5$;

$T_n = \frac{\sin n}{n}$; $X_n = \sqrt{2n+1}$; $Y_n = \frac{3n+2}{n+5}$

conseil : une suite est dite convergente lorsqu'elle admet une limite finie

SUITES PARTICULIERES

. **Suites arithmétiques**

conseil : bien relire la remarque pratique du cours

Exo1 : 1) soit (U_n) une suite arithmétique de raison 5 et avec $U_0 = -2$; calculer U_{20}

2) soit (U_n) une suite arithmétique telle que $U_{35} = 245$ et $U_{45} = 315$; calculer U_{41}

Exo2 : on considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies par $U_n = n + 7$ et $V_n = \frac{1}{2} + 3n$

préciser pourquoi (U_n) et (V_n) sont arithmétiques
quels en sont le premier terme et la raison ?

Exo3 : soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2U_{n+1} = 2U_n + 1$

1) montrer que (U_n) est arithmétique
2) déterminer U_n en fonction de n
3) calculer $S_n = U_4 + U_5 + ... + U_n$, et déterminer la valeur de n telle que $S_n = 168$

Exo4 : soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2U_n + 1}$

1) on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \dfrac{1}{U_n}$

a) montrer que (V_n) est arithmétique

b) en déduire une expression de U_n en fonction de n

2) quelle est la limite de V_n quand n tend vers $+\infty$?
en déduire la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

. **Suites géométriques**

conseil : bien relire la remarque pratique du cours

Exo5 : 1) soit (U_n) une suite géométrique de raison q = 3 avec $U_0 = -1$; calculer U_5 et U_7.

2) soit (U_n) une suite géométrique telle que $U_4 = 48$ et $U_8 = 3$; calculer U_0 et q , lorsque q > 0

3) soit (U_n) une suite géométrique telle que $U_5 = 17$ et q = 4 ; calculer $U_5 + U_6 + ...U_{13}$

Exo6 : on considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_n = \dfrac{5}{2^n}$ et $\begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = V_n - \dfrac{1}{3}V_n \end{cases}$

préciser pourquoi (U_n) et (V_n) sont géométriques
quels en sont le premier terme et la raison ?

Exo7 : étudier la limite de la suite (U_n) définie par la donnée explicite de U_n

1) $U_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ 2) $U_n = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 3) $U_n = \dfrac{1}{1+2^n}$

Exo8 : on considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$

1) on suppose $U_0 = 3$
calculer U_1 puis U_n pour tout n ≥1
que peut-on en déduire sur la suite (U_n) ?

2) on suppose $U_0 = 2$, et on définit la suite (V_n) par : $V_n = U_n - 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison q = $\dfrac{1}{3}$

3) exprimer U_n en fonction de n
en déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite

4) exprimer en fonction de n la somme S_n : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

. **<u>Problème de mathématique financière</u>**

<u>Exo9</u> : on place un capital C_0 de 10 000 euros au taux annuel de 6%.

1) les intérêts sont simples
   soit (U_n) la suite représentant la somme disponible au bout de n années
   a) montrer que (U_n) est arithmétique ; on précisera son premier terme et sa raison
   b) exprimer U_n en fonction de n
   c) calculer U_{10} et U_{12}
2) les intérêts sont composés
   soit (C_n) la suite représentant la somme disponible au bout de n années
   a) montrer que (C_n) est géométrique ; on précisera son premier terme et sa raison
   b) exprimer C_n en fonction de n
   c) calculer C_{10} et C_{12}, puis les comparer à U_{10} et U_{12}

<u>*conseil*</u> *:* **.** *quand les intérêts sont simples, les intérêts I produits chaque année sont calculés sur le capital initial : $I = C_0 \times 6\%$*

. *quand les intérêts sont composés, les intérêts acquis sont chaque année intégrés au capital et produisent à leur tour des intérêts ; et augmenter de 6% revient à multiplier par $1 + \frac{6}{100}$*

CORRIGE réalisé par M. QUET
GENERALITES SUR LES SUITES

. **Notion de suite**

Exo1 : 1) $U_n = \frac{n+2}{n+3}$ → $U_0 = \frac{0+2}{0+3} = \frac{2}{3}$, $U_1 = \frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4}$, $U_2 = \frac{2+2}{2+3} = \frac{4}{5}$,
$U_3 = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6}$, $U_{100} = \frac{100+2}{100+3} = \frac{102}{103}$

2) $U_n = \cos\frac{\pi n}{2}$ → $U_0 = \cos\frac{\pi\times 0}{2} = 1$, $U_1 = \cos\frac{\pi\times 1}{2} = 0$, $U_2 = \cos\frac{\pi\times 2}{2} = -1$,
$U_3 = \cos\frac{\pi\times 3}{2} = 0$, $U_{100} = \cos\frac{\pi\times 100}{2} = \cos 50\pi = \cos(25\times 2\pi) = 0$

3) $U_n = (-1)^n$ → $U_0 = (-1)^0 = 1$, $U_1 = (-1)^1 = -1$, $U_2 = (-1)^2 = 1$,
$U_3 = (-1)^3 = -1$, $U_{100} = (-1)^{100} = 1$

4) $U_n = 2^n + 1$ → $U_0 = 2^0 + 1 = 1$, $U_1 = 2^1 + 1 = 3$, $U_2 = 2^2 + 1 = 5$
$U_3 = 2^3 + 1 = 9$, $U_{100} = 2^{100} + 1$

5) $U_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ → $U_0 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 0$, $U_1 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$U_2 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $U_3 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$, $U_{100} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{100} = 1 - \frac{1}{2^{100}}$

Exo2 : 1) $U_n = \frac{5}{n}$ → $U_{n-1} = \frac{5}{n-1}$, $U_{n+1} = \frac{5}{n+1}$, $U_{n+2} = \frac{5}{n+2}$
$U_{3n} = \frac{5}{3n}$, $U_{3n-1} = \frac{5}{3n-1}$

2) $U_n = \frac{2n-1}{n+2}$ → $U_{n-1} = \frac{2(n-1)-1}{(n-1)+2} = \frac{2n-3}{n+1}$ $U_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+2} = \frac{2n+1}{n+3}$
$U_{n+2} = \frac{2(n+2)-1}{(n+2)+2} = \frac{2n+3}{n+4}$ $U_{3n} = \frac{2(3n)-1}{(3n)+2} = \frac{6n-1}{3n+2}$ $U_{3n-1} = \frac{2(3n-1)-1}{(3n-1)+2} = \frac{6n-3}{3n+1}$

3) $U_n = (-2)^n + 1$ → $U_{n-1} = (-2)^{n-1} + 1 = \frac{(-2)^n}{-2} + 1$ $U_{n+1} = (-2)^{n+1} + 1 = -2(-2)^n + 1$
$U_{n+2} = (-2)^{n+2} + 1 = 4(-2)^n + 1$ $U_{3n} = (-2)^{3n} + 1 = (-8)^n + 1$
$U_{3n} = (-2)^{3n-1} + 1 = \frac{(-8)^n}{-2} + 1$

4) $U_n = n^2 + n$ → $U_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1) = n(n-1)$ $U_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) = (n+1)(n+2)$
$U_{n+2} = (n+2)^2 + (n+2) = (n+2)(n+3)$ $U_{3n} = (3n)^2 + 3n = 3n(3n+1)$
$U_{3n-1} = (3n-1)^2 + 3n - 1 = 3n(3n-1)$

5) $U_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 5$ → $U_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 5 = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 5$ $U_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 5 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 5$
$U_{n+2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} + 5 = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 5$ $U_{3n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n} + 5 = \left(-\frac{1}{8}\right)^n + 5$

$$U_{3n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n-1} + 5 = -2\left(-\frac{1}{8}\right)^{n} + 5$$

Exo3 : 1) $U_{n+1} = 2U_n + 1$ → $U_1 = 2U_0 + 1 = 2\times1+1 = 3$; $U_2 = 2U_1 + 1 = 2\times3+1 = 7$

$U_3 = 2U_2 + 1 = 2\times7+1 = 15$; $U_4 = 2U_3 + 1 = 2\times15+1 = 31$

2) $U_{n+1} = \dfrac{5+U_n}{2-U_n}$ → $U_1 = \dfrac{5+U_0}{2-U_0} = \dfrac{5+1}{2-1} = 6$; $U_2 = \dfrac{5+U_1}{2-U_1} = \dfrac{5+6}{2-6} = -\dfrac{11}{4}$

$U_3 = \dfrac{5+U_2}{2-U_2} = \dfrac{5-\frac{11}{4}}{2+\frac{11}{4}} = \dfrac{9}{19}$; $U_4 = \dfrac{5+U_3}{2-U_3} = \dfrac{5+\frac{9}{19}}{2-\frac{9}{19}} = \dfrac{104}{29}$

3) $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 3}$ → $U_1 = \sqrt{U_0+3} = \sqrt{1+3} = 2$; $U_2 = \sqrt{U_1+3} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$

$U_3 = \sqrt{U_2+3} = \sqrt{\sqrt{5}+3}$; $U_4 = \sqrt{U_3+3} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{5}+3}+3}$

4) $U_{n+1} = \cos U_n$ → $U_1 = \cos U_0 = \cos 1$; $U_2 = \cos U_1 = \cos(\cos 1)$

$U_3 = \cos U_2 = \cos\left[\cos(\cos 1)\right]$; $U_4 = \cos U_3 = \cos\left(\cos\left[\cos(\cos 1)\right]\right)$

. Représentation graphique

Exo4 : on a : $U_n = 2n - 5$

donc : $U_0 = 2\times0-5 = -5$, $U_1 = 2\times1-5 = -3$,

$U_2 = 2\times2-5 = -1$, $U_3 = 2\times3-5 = 1$,

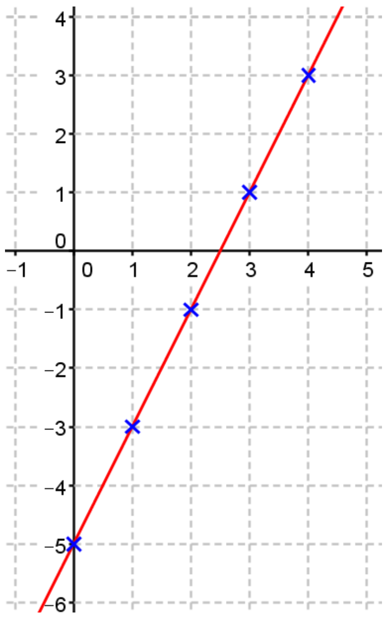
$U_4 = 2\times4-5 = 3$

ainsi dans un repère $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, les cinq premiers termes de (U_n) sont représentés par :

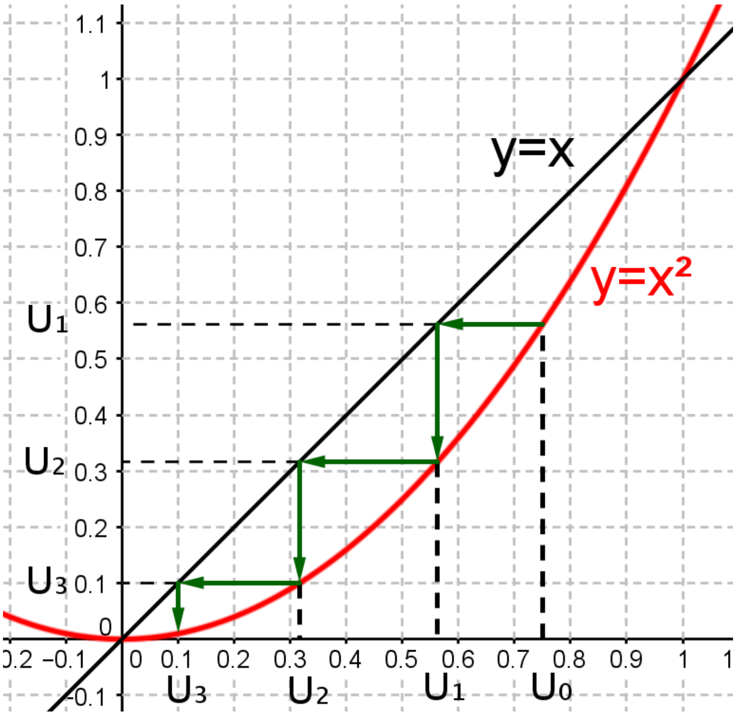
$(0;U_0)$, $(1;U_1)$, $(2;U_2)$, $(3;U_3)$, $(4;U_4)$

soit : $(0;-5)$, $(1;-3)$, $(2;-1)$, $(3;1)$, $(4;3)$

d'où :



Exo5 : soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = \dfrac{3}{4}$ et $U_{n+1} = U_n^{\,2}$



. **<u>Variations de la suite (U_n)</u>**

<u>Exo6</u> : 1) $U_n = n^2 - 1$

→ $U_{n+1} - U_n = \left((n+1)^2 - 1\right) - \left(n^2 - 1\right) = \left(n^2 + 2n + 1 - 1\right) - \left(n^2 - 1\right) = n^2 + 2n + 1 - 1 - n^2 + 1 = 2n + 1$

or $n \in \mathbb{N}$ d'où $2n+1 > 0$ soit : $U_{n+1} - U_n > 0$ ainsi (U_n) **est croissante.**

2) Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{3}{2x-1}$

f est décroissante sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ (car $3 > 0$) et $U_n = f(n)$ ainsi (U_n) **est décroissante.**

3) $U_{n+1} - U_n = \left(1 - \sqrt{n+1}\right) - \left(1 - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

or $n \in \mathbb{N}$ d'où $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ et $U_{n+1} - U_n < 0$ ainsi (U_n) **est décroissante.**

4) (U_n) est une suite de termes positifs , et $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5^{n+1}}{4^{n+2}} \times \frac{4^{n+1}}{5^n} = \frac{5}{4}$

donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ et $U_{n+1} > U_n$ ainsi (U_n) **est croissante.**

5) $U_{n+1} - U_n = (-2)^{n+1} - (-2)^n = (-2)^n\left[(-2) - 1\right] = -3(-2)^n$

le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend de la parité de n ainsi (U_n) **n'est ni croissante ni décroissante**

. **<u>Propriétés éventuelles de (U_n)</u>**

<u>Exo7</u> : 1) $U_{n+1} - U_n = \frac{2(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{2n+5}{n+1} = \frac{2n+7}{n+2} - \frac{2n+5}{n+1} = \frac{(2n+7)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(2n+5)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{2n^2 + 2n + 7n + 7}{(n+2)(n+1)} - \frac{2n^2 + 4n + 5n + 10}{(n+1)(n+2)} = \frac{-3}{(n+1)(n+2)}$

ainsi $U_{n+1} - U_n < 0$ et (U_n) **est décroissante.**

2) (U_n) étant décroissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \le U_0$

or $U_0 = 5$ donc (U_n) **est majorée par 5.**

Exo8 : 1) soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{x}$, ainsi : $U_n = f(n)$

2) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et , pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{8}{x^2}=\frac{x^2}{2x^2}-\frac{16}{2x^2}=\frac{x^2-16}{2x^2}=\frac{(x+4)(x-4)}{2x^2}$$

or sur $]0;+\infty[$: $2x^2>0$ et $x+4>0$, aussi le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x-4$:

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$ et $f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 4$

donc ***f* est croissante sur** $[4;+\infty[$ **et f est décroissante sur** $]0;4]$

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

3) . on a : $U_n = f(n)$

d'où , à partir du rang n = 4 , **la suite (U_n) est croissante**

. on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, donc (U_n) **ne peut pas être majorée**

. $U_1=\dfrac{17}{2}$, $U_2=5$, $U_3=\dfrac{25}{6}$ et $(U_n)_{n\geq 4}$ est croissante.

donc, pour tout $n\geq 4$, $U_n>U_4$ donc $(U_n)_{n\geq 4}$ **est minorée par 4.**

Exo9 : on a : $U_{n+5}=\cos\dfrac{2(n+5)\pi}{5}=\cos\dfrac{2n\pi+10\pi}{5}=\cos\left(\dfrac{2n\pi}{5}+2\pi\right)=\cos\dfrac{2n\pi}{5}=U_n$

donc **la suite (U_n) est périodique de période 5.**

. Démonstration par récurrence

Exo10 : 1) montrons par récurrence que , pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0\leq U_n\leq 4$

. **Initialisation** : on a : $U_0=0$, d'où $0\leq U_0\leq 4$

. **Hérédité** : supposons que, pour n fixé au hasard dans $\mathbb{N}$, on ait : $0\leq U_n\leq 4$

Regardons alors si $0\leq U_{n+1}\leq 4$

par hypothèse de récurrence, on a : $0\leq U_n\leq 4$

$$0\leq \frac{1}{2}U_n\leq 2$$

$$2\leq \frac{1}{2}U_n+2\leq 4$$

$$2\leq U_{n+1}\leq 4$$

. **conclusion** : (U_n) **est minorée par 0 et majorée par 4.**

2) montrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $U_n\leq U_{n+1}$

. **Initialisation** : on a : $U_0=0$ et $U_1=2$, d'où $U_0\leq U_1$

. Hérédité : supposons que, pour n fixé au hasard dans $\mathbb{N}$, on ait : $U_n \leq U_{n+1}$

regardons alors si : $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

par hypothèse de récurrence, on a :

$$U_n \leq U_{n+1}$$
$$\frac{1}{2}U_n \leq \frac{1}{2}U_{n+1}$$
$$\frac{1}{2}U_n + 2 \leq \frac{1}{2}U_{n+1} + 2$$
$$U_{n+1} \leq U_{n+2}$$

. conclusion : (U_n) **est croissante**

. **Limite d'une suite**

Exo11 : . $U_n = n^2 - 1$: on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$: (U_n) **ne converge pas**

. $V_n = \frac{-2}{n^2+1}$: on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$: (V_n) **converge vers 0**

. $W_n = \frac{1}{n^2} + 5$: on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 5$: (W_n) **converge vers 5**

. $T_n = \frac{\sin n}{n}$: on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq \sin n \leq 1$ d'où : $\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$

donc, d'après le théorème des gendarmes, (T_n) **converge** et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 0$

. $X_n = \sqrt{2n+1}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = +\infty$: (X_n) **ne converge pas**

. $Y_n = \frac{3n+2}{n+5}$: on a : $\frac{3n+2}{n+5} = \frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{5}{n}\right)} = \frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{5}{n}}$ or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 3$: (Y_n) **converge vers 3**

SUITES PARTICULIERES

. **Suites arithmétiques**

Exo1 : 1) (U_n) une suite arithmétique donc : $U_{20} = U_0 + 20r = -2 + 20 \times 5 = 98$

2) (U_n) une suite arithmétique donc : $U_{45} = U_{35} + 10r \Leftrightarrow 315 = 245 + 10r \Leftrightarrow r = \frac{70}{10} = 7$

$U_{41} = U_{45} - 4r = 315 - 4 \times 7 = 287$

Exo2 : . $U_n = n + 7$: on a : $U_{n+1} - U_n = ((n+1)+7) - (n+7) = n + 8 - n - 7 = 1$, soit : $U_{n+1} = U_n + 1$

ainsi (U_n) est une suite arithmétique de raison **r = 1** et de premier terme $\boldsymbol{U_0 = 7}$

. $V_n = \frac{1}{2} + 3n$: on a : $V_{n+1} - V_n = \left(\frac{1}{2} + 3(n+1)\right) - \left(\frac{1}{2} + 3n\right) = 3n + 3 - 3n = 3$, d'où : $V_{n+1} = V_n + 3$

Exo3 : 1) $2U_{n+1}=2U_n+1$ d'où : $U_{n+1}=U_n+\frac{1}{2}$

ainsi (U_n) est une suite arithmétique de raison $\mathbf{r=\frac{1}{2}}$ et de premier terme $\boldsymbol{U_0=1}$

2) d'après la définition 2 du cours, on a : $U_n=U_0+nr=1+\frac{n}{2}$

3) **.** de U_4 à U_n, il y a (n – 3) termes, d'où : $S_n=U_4+U_5+....+U_n=\frac{n-3}{2}(U_4+U_n)$

or : $U_4=3$ donc : $S_n=U_4+U_5+....+U_n=\frac{n-3}{2}\left(3+1+\frac{n}{2}\right)=\frac{n-3}{2}\times\frac{n+8}{2}=\frac{(n-3)(n+8)}{2}$

. $S_n=168$ équivaut à $\frac{(n-3)(n+8)}{4}=168$ soit : $n^2+5n-696=0$

le discriminant de ce trinôme est $\Delta=53^2>0$

le trinôme admet donc deux racines réelles distinctes :

$n_1=\frac{-5-53}{2}=-28\notin\mathbb{N}$ et $n_2=\frac{-5+53}{2}=24\in\mathbb{N}$

donc $S_n=168$ pour **n = 24**

Exo4 : 1) a) $V_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}}=\frac{2U_n+1}{U_n}=2+\frac{1}{U_n}=2+V_n$ soit $V_{n+1}=V_n+2$

donc (V_n) **est une suite arithmétique** de raison **r = 2** et de premier terme $V_0=\frac{1}{U_0}=1$

b) on a : $V_n=V_0+nr=1+2n$

or : $U_n=\frac{1}{V_n}$ d'où : $U_n=\frac{1}{1+2n}$

2) $\lim_{n\to+\infty}V_n=\lim_{n\to+\infty}1+2n=+\infty$ donc : $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{V_n}=0$

. **Suites géométriques**

Exo5 : 1) on a : $U_5=U_0\times q^5=-3^5=-343$, $U_7=U_5\times q^2=-343\times3^2=-2187$

2) on a : $U_8=U_4\times q^4 \Leftrightarrow 3=48\times q^4 \Leftrightarrow q^4=\frac{1}{16} \Leftrightarrow q^4=\frac{1}{2}$

$U_4=U_0\times q^4 \Leftrightarrow 48=U_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow 48=U_0\times\frac{1}{16} \Leftrightarrow U_0=16\times48=768$

3) la somme $U_5+U_6+...U_{13}$ comporte 9 termes

d'où : $U_5+U_6+...U_{13}=U_5\times\frac{1-q^9}{1-q}=17\times\frac{1-4^9}{1-4}=\frac{17}{3}(4^9-1)=1\,485\,477$

Exo6 : **.** $U_n=\frac{5}{2^n}$: on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{5}{2^{n+1}}\times\frac{2^n}{5}=\frac{1}{2}$

donc (U_n) **est une suite géométrique** de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $U_0=5$

. $\begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = V_n - \frac{1}{3}V_n \end{cases}$: on a : $V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n$

donc (V_n) **est une suite géométrique** de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $V_0 = 4$

Exo7 : 1) $U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$: (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

or $0 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

2) $U_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$: (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Or $q > 1$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

3) $U_n = \frac{1}{1+2^n}$: $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1+2^n = +\infty$

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Exo8 : $\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$

1) si $U_0 = 3$, alors : $U_1 = \frac{1}{3}U_0 + 2 = \frac{1}{3}\times 3 + 2 = 3$, puis : $U_2 = \frac{1}{3}U_1 + 2 = \frac{1}{3}\times 3 + 2 = 3$, etc

Ainsi : $U_n = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: **la suite (U_n) est donc constante**

2) $V_n = U_n - 3$: on a : $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1}-3}{U_n - 3} = \frac{\frac{1}{3}U_n + 2 - 3}{U_n - 3} = \frac{\frac{1}{3}U_n - 1}{U_n - 3} = \frac{\frac{1}{3}(U_n - 3)}{U_n - 3} = \frac{1}{3}$

donc (V_n) **est une suite géométrique** de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 3 = -1$

3) . on a : $V_n = V_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{-1}{3^n}$; de plus : $U_n = V_n + 3 = 3 - \frac{1}{3^n}$

. (V_n) est une suite géométrique avec $0 < q < 1$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

donc (U_n) **converge et** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3$

4) $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = (V_0 + 3) + (V_1 + 3) + \ldots (V_n + 3) = V_0 + V_1 + \ldots + V_n + 3\,(n+1)$

$$S_n = V_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + 3(n+1) = (-1)\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + 3(n+1) = -\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + 3(n+1)$$

. **<u>problème de mathématique financière</u>**

Exo9 : capital C_0 de 10 000 euros au taux annuel de 6%.

1) a) on a : $I = C_0 \times \frac{6}{100} = 10\,000 \times \frac{6}{100} = 600$ euros d'où : $U_{n+1} = U_n + 600$

donc (U_n) **est une suite arithmétique** de raison $r = 600$ et de premier terme $U_0 = 10\,000$

b) $U_n = U_0 + nr = 10\ 000 + 600n$

c) $U_{10} = 10\ 000 + 600 \times 10 = 16\ 000$ **euros**

$U_{12} = 10\ 000 + 600 \times 12 = 17\ 200$ **euros**

2) a) on a : $C_1 = C_0 + \frac{6}{100} \times C_0 = C_0\left(1 + \frac{6}{100}\right)$; $C_2 = C_1\left(1 + \frac{6}{100}\right)$; etc

ainsi : $C_{n+1} = C_n\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 1{,}06C_n$

et (C_n) **est une suite géométrique** de raison q = 1,06 et de premier terme C_0 = 10 000

b) $C_n = C_0 \times q^n = 10\ 000 \times 1{,}06^n$

c) $C_{10} = C_0 \times q^{10} \approx 17\ 908$ **euros**

$C_{12} = C_0 \times q^{12} \approx 20\ 122$ **euros**

on remarque que : $C_{10} > U_{10}$ et $C_{12} > U_{12}$